

Navn: \_\_\_\_\_ Klasse: \_\_\_\_\_

## Matematik Opgave Kompendium

**René Descartes** (1596-1650)

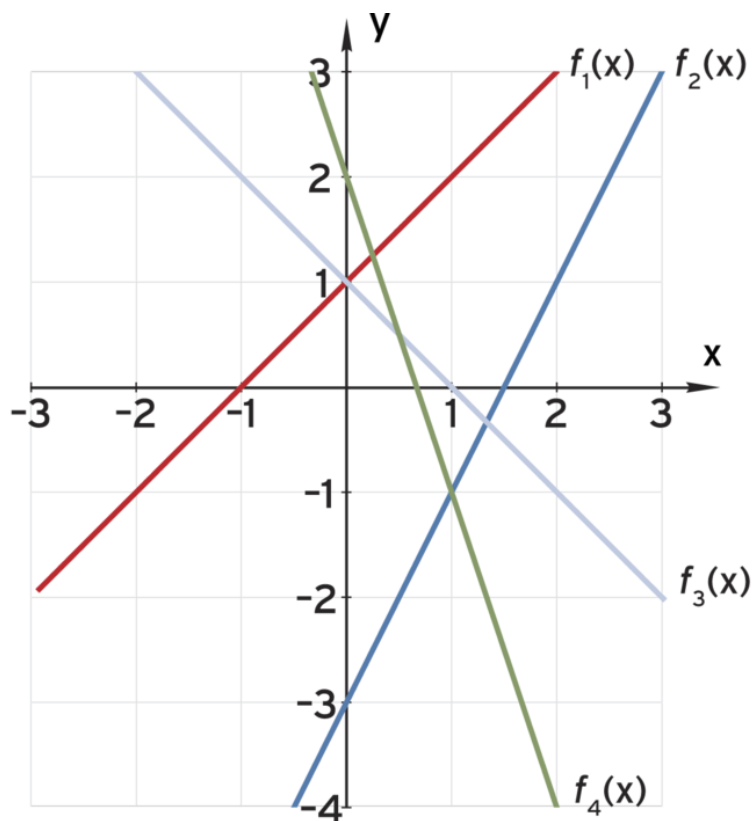
Fransk filosof og matematiker der finder på at kombinerer Algebra (ligninger) med Geometri og får hermed Analytisk Geometri (koordinatsystemet)! I dette kan man afbillede ligninger som f.eks. rette linjer, buer eller andet!

Udover dette er han også kendt for filosofi udsagnet:

”Jeg tænker - derfor er jeg”!

# Analytisk Geometri 1

(Den rette linje)



## Følgende gennemgås

- Koordinatsystemet & 2D punkter
- Spejling
- Sildeben & den rettelinje
- Linjens ligning (tegning & aflæsning)
- 2 linjers skæringspunkt
- Grafisk problemløsning
- Ligefrem & omvendtproportionalitet
- Andengrad & parablen
- Geogebra (IT program)

**Opgaver:** 26

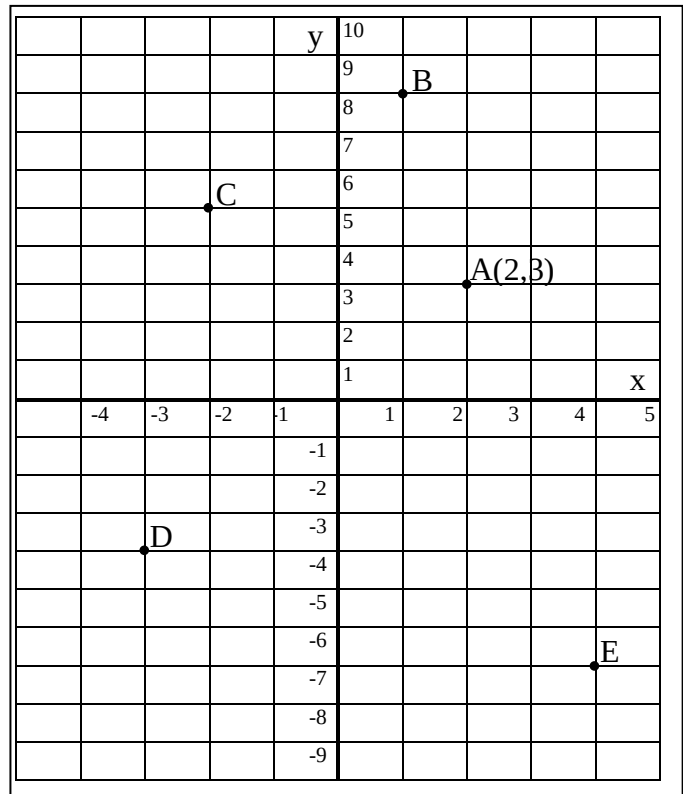
**Ekstra:** 6

**Mdt:** 6

**Point:** \_\_\_\_\_

**Koordinatsystemet:**

Til højre ses et eksempel på René Descartes koordinatsystem med 2 akser kaldt **x** (vandret) og **y** **aksen** (lodret). Det punkt hvor de to akser krydser hinanden kaldes for **Origo** (nulpunktet). Hver akse er opdelt i enheder startende med nul fra Origo. X og Y akslen behøver ikke at have den samme inddeling men oftest er det en god ide.

**Koordinatpunkt:**

Et koordinatsystem kan bl.a. bruges til, at afsætte koordinatpunkter som tilsammen kan danne forskellige figurer. Et koordinatpunkt kan skrives matematisk som et **koordinatsæt**

der består af to tal eks: A(2, 3) hvor 2 er **x koordinaten** og 3 er **y koordinaten** altså (x, y).

*X koordinaten angiver hvor mange enheder punktet ligger ud af x akslen, hvorimod y koordinaten angiver hvor mange enheder punktet ligger ud af y akslen.*

**Opgave 1:** Aflæs koordinatsættene til punkterne B, C, D, E i systemet ovenfor.

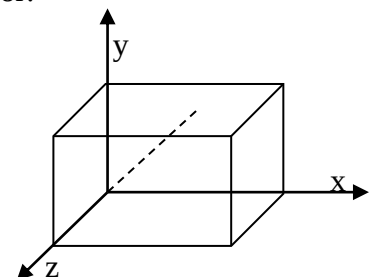
- a) B( , )
- b) C( , )
- c) D( , )
- d) E( , )

**Huskeregler:**

- Xylofon
- Hen af gaden op til Yvonne
- X = pige, Y = dreng

**Opgave 2:** Afsæt følgende koordinatpunkter i koordinatsystemet ovenfor.

- a) F(3, 6)
- b) G(-4, 2)
- c) H(3, - 5)
- d) I(-2, -6)

**Det 3 dimensionelle koordinatsystem:**

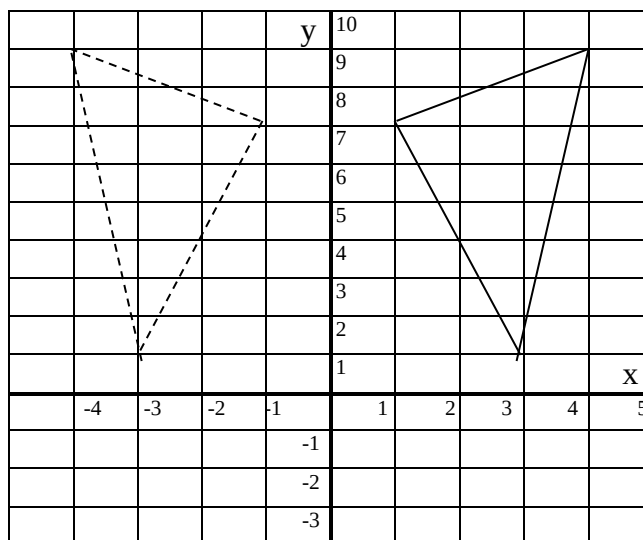
Et 3 dimensionelt koordinatsystem har foruden en x og y akse også en **z akse**. Denne z akse går igennem Origo vinkelret ud fra papiret. Et 3D punkt har derfor ikke 2 koordinater men 3.

**Facit:** (-3, -4) (-2, 5) (1,8) (4, -7) (5, 3)

**Spejling af figurer i koordinatsystemet:**

Man spejler en figur ved at spejle hvert af punkterne i figuren.

Man spejler et punkt ved at måle punktets afstand indtil spejlet (den vinkelrette afstand). Herefter afsættes det spejlede punkt i en tilsvarende afstand bag ved spejlet. Spejlet kan være y-aksen eller x-aksen men teknisk set kan det være alle rette linjer der fungerer som et spejl.



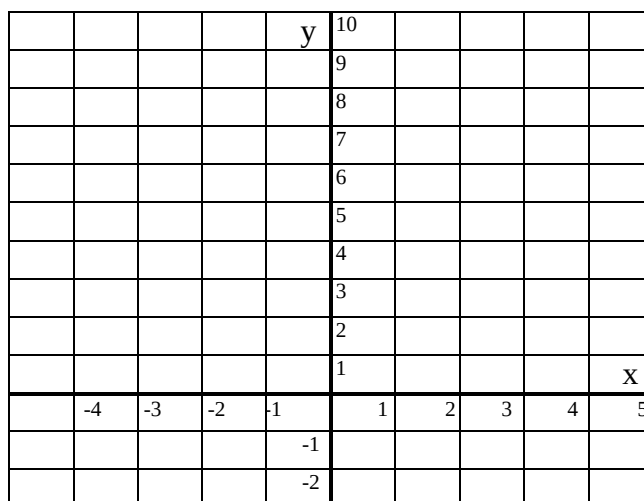
Figur spejlet i y-aksen

**Opgave 3:** Afsæt koordinatpunkterne og tegn figuren op. Spejl herefter figuren i y akse. Aflæs herefter de spejlede punkter.

- a) A(1, 3)
- b) B(0, 8)
- c) C(4, 6)
- d) D(2, -2)

Aflæs spejlede punkter:

- a) A'( , )
- b) B'( , )
- c) C'( , )
- d) D'( , )

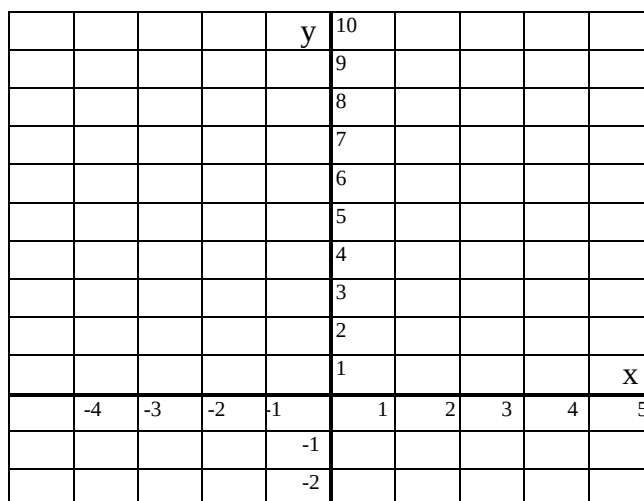


**Opgave 4:** Samme som i opg. 3.

- a) A(2, -1)
- b) B(-2, 8)
- c) C(3, 6)

Aflæs spejlede punkter:

- e) A'( , )
- f) B'( , )
- g) C'( , )



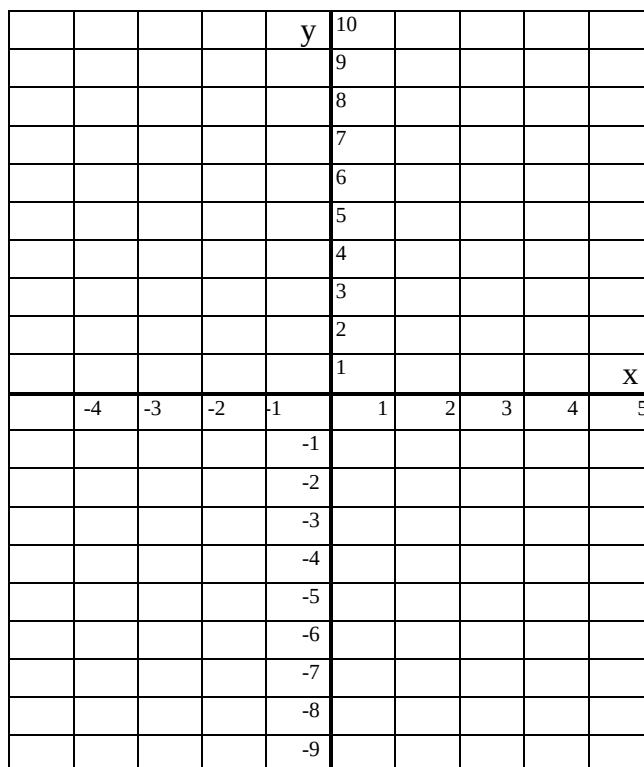
**Facit:** (-4, 6) (-3, 6) (-2, -2) (-2, -1) (-1, 3) (0, 0) (0, 8) (2, 8) (3, 4)

**Opgave 5:** Afsæt punkterne, tegn figur og spejl i x-aksen. Aflæs herefter de spejlede punkter.

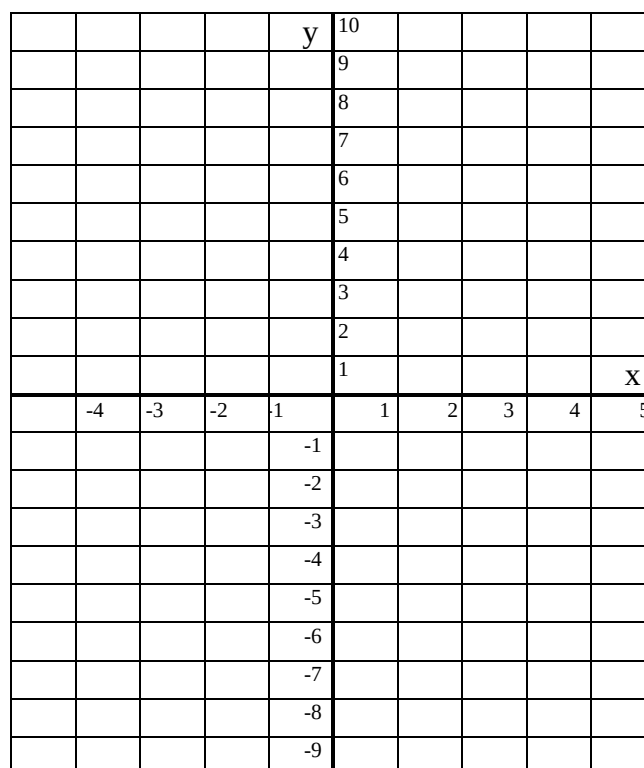
- a) A(4, 3)
- b) B(1, -6)
- c) C(-2, 3)

Aflæs spejlede punkter:

- d) A'( , )
- e) B'( , )
- f) C'( , )



**Opgave 6:** Tegn en figur der består af 4 punkter og spejl den i y-aksen og x-aksen. Gerne med forskellige farver.



### Ekstra Opgave 1:

En hest ved et 11 m langt tøj (snor) har græs i 6 timer. I hvor lang tid vil den da have græs,

når tøjret gøres 15 dm kortere? (**Hint:** hvor mange m<sup>2</sup> græs spiser hesten pr time?)

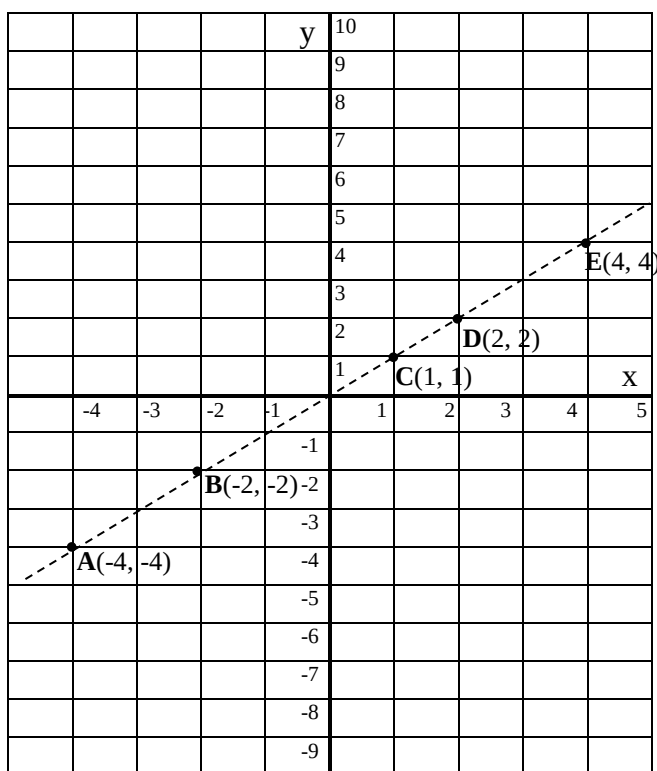
**Facit:** 3,2 4,5 (-2, -3) (1, 6) (4, -3) (5, 2)

**Den rette linje:**

Punkterne A, B, C, D, E i koordinatsystemet til højre ligger alle sammen på en ret linje. Når dette er tilfældet kan man i stedet for at beskrive linjen vha. punkterne beskrive den vha. en ligning. I dette tilfælde kan vi se at y koordinaten altid er det samme som x koordinaten i alle punkter - så derfor må ligningen være:

$$y = x$$

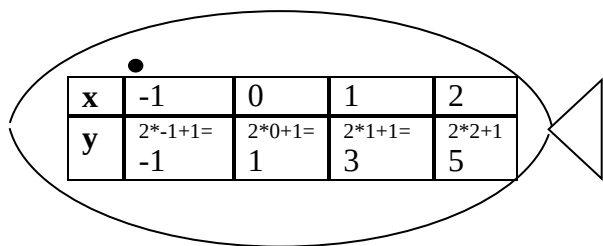
hvor x er x-koordinaten i et punkt på linjen og y det tilhørende y-koordinat i det samme punkt. Dvs. at ligningen i virkeligheden beskriver et uendeligt antal punkter som ligger på linjen.

**Sildeben:**

Du skal nu tegne ligningen  $y = 2x + 1$  i koordinatsystemet nedenfor. Men først må vi finde nogle punkter som ligger på linjen. Punkterne kan man finde vha. et sildeben. I et sildeben (se nedenfor) vælger man nogle passende x værdier som man sætter ind i øverste række. Derefter beregner man den tilhørende y værdi til hver x-værdi.

Dette gør man ved at sætte x-værdien ind i ligningen eks. ved at sætte 1 ind i ligningen fås:

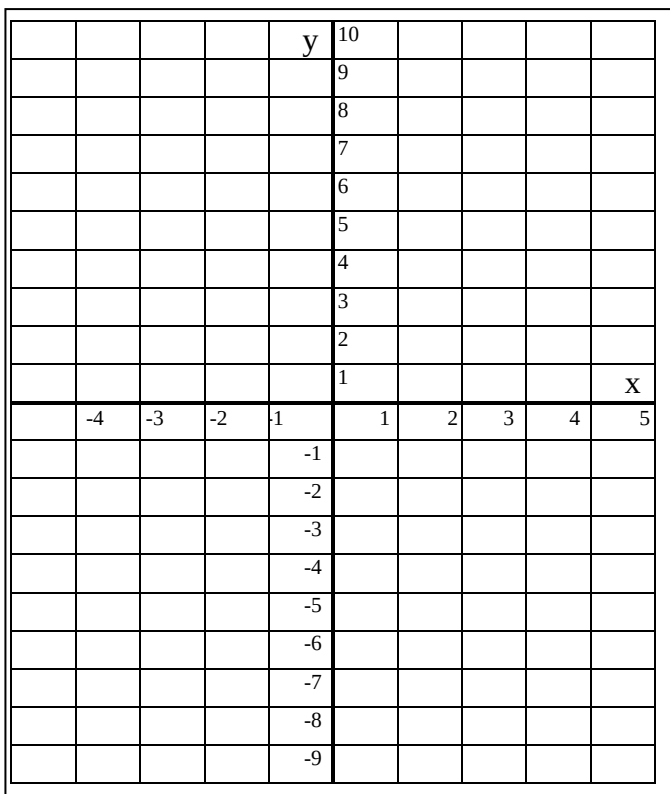
$$y = 2 * 1 + 1 = 3 \text{ (2x betyder jo } 2*x\text{)}$$



Dvs. At linjen består af A(-1, -1), B(0,1), C(1,3), D(2,5)

**Opgave 7:** Tegn ligningen  $y = x + 2$  vha. sildebenet

|   |    |    |   |   |   |
|---|----|----|---|---|---|
| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| y |    |    |   |   |   |



**Opgave 8:** Lav sidebenene for hver af ligningerne og tegn derefter linjerne. **HUSK** at forlæng linjen med lineal når punkterne er plottet ind. Aflæs herefter skæringspunkterne for linjerne og kontroller med facit (brug gerne forskellige farver til linjerne).

a)  $y = x - 1$

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| y |   |   |   |   |   |

b)  $y = 2x - 1$

| x |  |  |  |  |  |
|---|--|--|--|--|--|
| y |  |  |  |  |  |

Skæring imellem a og b ( , )

c)  $y = 2x$

| x |  |  |  |  |  |
|---|--|--|--|--|--|
| y |  |  |  |  |  |

d)  $y = 1x + 3$

| x |  |  |  |  |  |
|---|--|--|--|--|--|
| y |  |  |  |  |  |

Skæring imellem c og d ( , )

e)  $y = -x + 4$

| x |  |  |  |  |  |
|---|--|--|--|--|--|
| y |  |  |  |  |  |

f)  $y = x$

| x |  |  |  |  |  |
|---|--|--|--|--|--|
| y |  |  |  |  |  |

Skæring imellem e og f ( , )

g)  $y = -2x$

| x |  |  |  |  |  |
|---|--|--|--|--|--|
| y |  |  |  |  |  |

h)  $y = -1x$

| x |  |  |  |  |  |
|---|--|--|--|--|--|
| y |  |  |  |  |  |

Skæring imellem g og h ( , )

|  |    |    |    |    |    |   |   |   |   |
|--|----|----|----|----|----|---|---|---|---|
|  |    |    |    | y  | 10 |   |   |   |   |
|  |    |    |    |    | 9  |   |   |   |   |
|  |    |    |    |    | 8  |   |   |   |   |
|  |    |    |    |    | 7  |   |   |   |   |
|  |    |    |    |    | 6  |   |   |   |   |
|  |    |    |    |    | 5  |   |   |   |   |
|  |    |    |    |    | 4  |   |   |   |   |
|  |    |    |    |    | 3  |   |   |   |   |
|  |    |    |    |    | 2  |   |   |   |   |
|  |    |    |    |    | 1  |   |   |   | x |
|  | -4 | -3 | -2 | -1 | 1  | 2 | 3 | 4 | 5 |
|  |    |    |    | -1 |    |   |   |   |   |
|  |    |    |    | -2 |    |   |   |   |   |
|  |    |    |    | -3 |    |   |   |   |   |
|  |    |    |    | -4 |    |   |   |   |   |
|  |    |    |    | -5 |    |   |   |   |   |
|  |    |    |    | -6 |    |   |   |   |   |
|  |    |    |    | -7 |    |   |   |   |   |
|  |    |    |    | -8 |    |   |   |   |   |
|  |    |    |    | -9 |    |   |   |   |   |



**Aha skreg skurken:**

- Hvad har linjerne e, g, h tilfælles: \_\_\_\_\_
- Hvad gør tallet der står foran x (se linje a og b): \_\_\_\_\_
- Hvad gør tallet der står efter x (se linje d og e): \_\_\_\_\_

**Facit:** (-5, -2) (-2, -3) (0, -1) (0, 0) (1, 3) (2, 2) (3, 6)

**Linjens ligning:**

Når man tegner linjen til en ligning kan man benytte et sildeben. Men der er også en hurtigere og mere direkte vej. Hvis man sammenligner de forskellige ligninger med deres linjer vil man bemærke, at *det tal som står efter x'et bestemmer hvor linjen skærer y-aksen*. Omvendt bestemmer *det tal der står foran x hvor meget linjen hælder*. Dvs. hvor meget y stiger når x stiger med 1. Tallet foran x kaldes af denne årsag for hældningen og benævnes a. Omvendt kaldes tallet efter x for skæring med y-aksen og benævnes b.

**Linjens ligning:**  $y = ax + b$

hvor a = hældning (1 ud af x-aksen a op af y)

b = skæring med y-aksen



Hvis man skal tegne ligningen  $y = 1x + 3$  ved man at den starter i (0, 3) og stiger en hver gang x stiger 1 (dvs. en ud en op – en ud en op fra (0, 3)).

**Opgave 9:** Find hældning (a) og skæring med y-aksen (b) og tegn ligningerne i koordinatsystemet. Find derefter skæringspunkterne mellem linjerne og tjek med facit (brug gerne forskellige farver).

a)  $y = 1x + 3$       a = \_\_\_\_ b = \_\_\_\_

b)  $y = 2x - 1$       a = \_\_\_\_ b = \_\_\_\_

Skæring mellem a og b ( , )

c)  $y = 1x - 2$       a = \_\_\_\_ b = \_\_\_\_

d)  $y = 3x + 4$       a = \_\_\_\_ b = \_\_\_\_

Skæring mellem c og d ( , )

e)  $y = x + 6$       a = \_\_\_\_ b = \_\_\_\_

f)  $y = 3x + 2$       a = \_\_\_\_ b = \_\_\_\_

Skæring mellem e og f ( , )

g)  $y = 2x - 2$       a = \_\_\_\_ b = \_\_\_\_

h)  $y = x + 0$       a = \_\_\_\_ b = \_\_\_\_

Skæring mellem g og h ( , )

|  |    |    |    |    |    |   |   |   |   |
|--|----|----|----|----|----|---|---|---|---|
|  |    |    |    | y  | 10 |   |   |   |   |
|  |    |    |    |    | 9  |   |   |   |   |
|  |    |    |    |    | 8  |   |   |   |   |
|  |    |    |    |    | 7  |   |   |   |   |
|  |    |    |    |    | 6  |   |   |   |   |
|  |    |    |    |    | 5  |   |   |   |   |
|  |    |    |    |    | 4  |   |   |   |   |
|  |    |    |    |    | 3  |   |   |   |   |
|  |    |    |    |    | 2  |   |   |   |   |
|  |    |    |    |    | 1  |   |   |   | x |
|  | -4 | -3 | -2 | -1 | 1  | 2 | 3 | 4 | 5 |
|  |    |    |    |    | -1 |   |   |   |   |
|  |    |    |    |    | -2 |   |   |   |   |
|  |    |    |    |    | -3 |   |   |   |   |
|  |    |    |    |    | -4 |   |   |   |   |
|  |    |    |    |    | -5 |   |   |   |   |
|  |    |    |    |    | -6 |   |   |   |   |
|  |    |    |    |    | -7 |   |   |   |   |
|  |    |    |    |    | -8 |   |   |   |   |
|  |    |    |    |    | -9 |   |   |   |   |

**Facit:** (-5, -2) (-3, -5) (0, -1) (1, 0) (2, 2) (2, 8) (4, 7)





**Aflæsning linjens ligning:**

Når man skal finde linjens ligning ser man først hvor linjen skærer y-aksen. I eksemplet til højre skærer den i 1 ( $b = 1$ ).

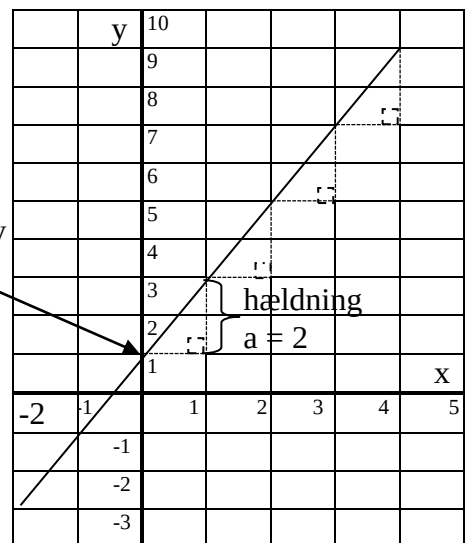
Herefter ser man på hvor meget linjen stiger hver gang  $x$  vokser med 1. Dette er hældningen og i eksemplet ses det at hældningen er 2. ( $a = 2$ )

Herefter sætter man tallene ind i linjens ligning:

$$y = ax + b$$

$$y = 2x + 1$$

Skæring med y  
 $b = 1$



**Opgave 12:** I koordinatsystemet nedenfor er tegnet 5 linjer. Find hver af linjernes ligninger.

a)  $a = \underline{\hspace{2cm}}$   $b = \underline{\hspace{2cm}}$

$y = \underline{\hspace{4cm}}$

b)  $a = \underline{\hspace{2cm}}$   $b = \underline{\hspace{2cm}}$

$y = \underline{\hspace{4cm}}$

c)  $a = \underline{\hspace{2cm}}$   $b = \underline{\hspace{2cm}}$

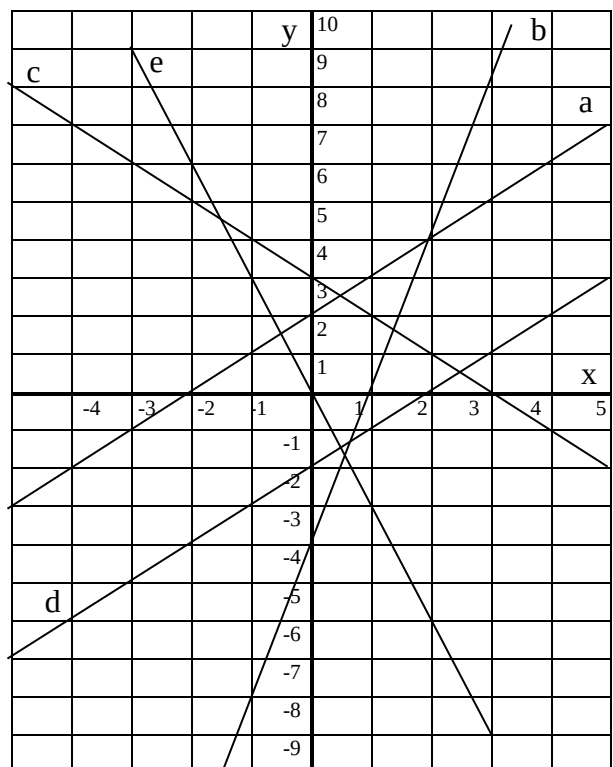
$y = \underline{\hspace{4cm}}$

d)  $a = \underline{\hspace{2cm}}$   $b = \underline{\hspace{2cm}}$

$y = \underline{\hspace{4cm}}$

e)  $a = \underline{\hspace{2cm}}$   $b = \underline{\hspace{2cm}}$

$y = \underline{\hspace{4cm}}$



**Facit:**  $(-3x)$   $(-x + 3)$   $(x - 2)$   $(x + 2)$   $(x + 5)$   $(4x - 4)$

**Opgave 13:** I koordinatsystemet nedenfor er tegnet 5 linjer. Find hver af linjernes ligninger.

a)  $a = \underline{\hspace{1cm}}$   $b = \underline{\hspace{1cm}}$

$y = \underline{\hspace{2cm}}$

b)  $a = \underline{\hspace{1cm}}$   $b = \underline{\hspace{1cm}}$

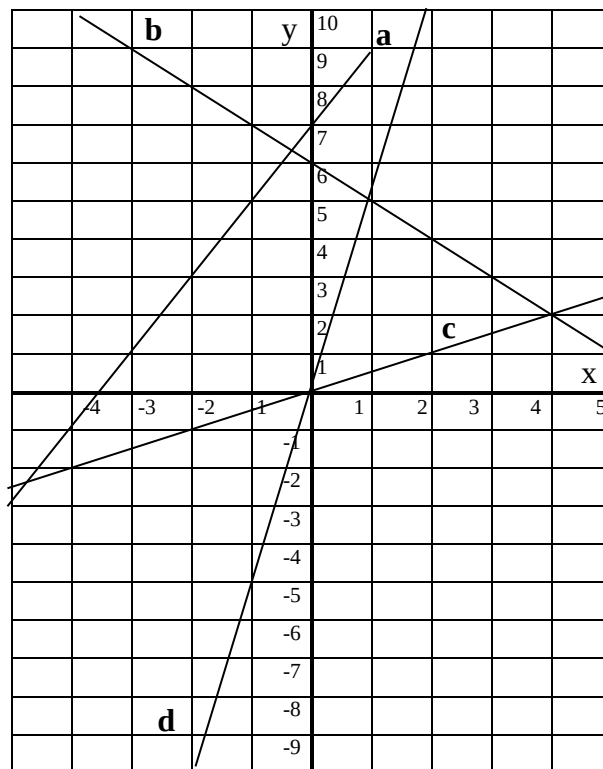
$y = \underline{\hspace{2cm}}$

c)  $a = \underline{\hspace{1cm}}$   $b = \underline{\hspace{1cm}}$

$y = \underline{\hspace{2cm}}$

d)  $a = \underline{\hspace{1cm}}$   $b = \underline{\hspace{1cm}}$

$y = \underline{\hspace{2cm}}$



**Opgave 14:** I koordinatsystemet nedenfor er tegnet 5 linjer. Find hver af linjernes ligninger.

a)  $a = \underline{\hspace{1cm}}$   $b = \underline{\hspace{1cm}}$

$y = \underline{\hspace{2cm}}$

b)  $a = \underline{\hspace{1cm}}$   $b = \underline{\hspace{1cm}}$

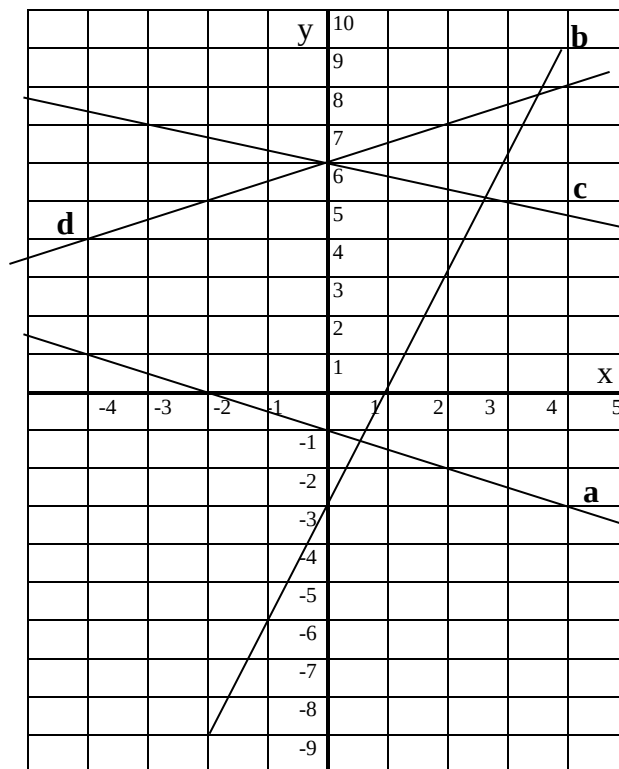
$y = \underline{\hspace{2cm}}$

c)  $a = \underline{\hspace{1cm}}$   $b = \underline{\hspace{1cm}}$

$y = \underline{\hspace{2cm}}$

d)  $a = \underline{\hspace{1cm}}$   $b = \underline{\hspace{1cm}}$

$y = \underline{\hspace{2cm}}$



**Facit:**  $(-2x + 3)$   $(-x + 6)$   $(-\frac{1}{2}x - 1)$   $(-\frac{1}{3}x + 6)$   $(\frac{1}{2}x)$   $(\frac{1}{2}x + 6)$   $(x + 1)$   $(2x + 7)$   $(3x - 3)$   $(5x)$

**Bestemmelse af to rette linjers skæringspunkt:**

To linjer i et koordinatsystem vil altid skære hinanden i et punkt såfremt de ikke er parallelle. Man kan selvfølgelig til enhver tid indtegne linjerne i et koordinatsystem og aflæse skæringspunkterne. Men man kan også beregne sig frem til skæringspunkterne hvis man kender linjernes ligninger. Måden man gør dette er at sætte ligningerne lig hinanden. I det følgende gives et eksempel på hvordan dette kan gøres. Vi har to linjer vi kalder m og n:

$$m: y = x + 1$$

$$n: y = -x + 8$$

Vi skal finde netop det tal (den x værdi) som indsat i henholdsvis m og n giver den samme y værdi:

$$m = n$$

$$x + 1 = -x + 8$$

Vi løser herefter ligning ved at isolere x.

$$x = -x + 8 - 1 \quad (\text{vi flytter 1 som bliver til } -1)$$

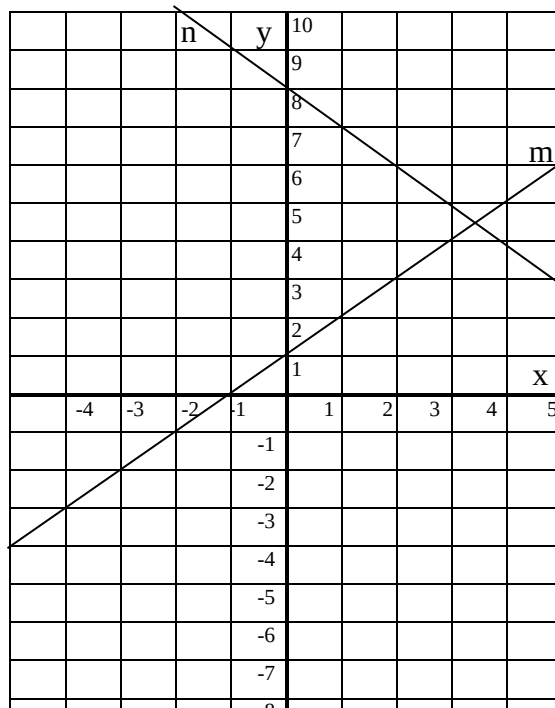
$$x = -x + 7$$

$$x + x = 7 \quad (\text{vi flytter } -x)$$

$$2x = 7$$

$$x = \frac{7}{2} \quad (\text{vi flytter 2 ved at dividere})$$

$$x = 3\frac{1}{2}$$



Vi ved nu at x koordinaten til skæringspunktet er  $3\frac{1}{2}$ ! Da skæringspunktet ligger på begge linjer behøver vi blot at sætte  $3\frac{1}{2}$  ind i en af ligningerne for derved at beregne y koordinaten. Vi vælger m

$$y = 3\frac{1}{2} + 1 = 4\frac{1}{2}$$

Skæringspunktet bliver da  $(3\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2})$ .

**Opgave 15:** Beregn skæringspunkterne imellem linjerne! (Evt. kan man også tegne linjerne i koordinatsystemet på næste side hvis det er en hjælp. Facit står på næste side)

a) Beregn skæringspunktet imellem linje m:  $y = 2x - 3$  og linje n:  $y = -x + 6$ .

$$2x - 3 = -x + 6 \quad (\text{lidt hjælp er givet. Nu skal x isoleres ligesom ved almindelig ligning})$$

Skæringspunkt: \_\_\_\_\_ (facit på næste side)



b) Beregn skæringspunktet imellem

$$m: y = x + 1 \text{ og}$$

$$n: y = 2x - 3.$$

Skæringspunkt: \_\_\_\_\_

c) Beregn skæringspunktet imellem:

$$m: y = 2x - 3 \text{ og}$$

$$n: y = x - 5.$$

|  |    |    |    |    |    |   |   |   |   |   |
|--|----|----|----|----|----|---|---|---|---|---|
|  |    |    |    | y  | 10 |   |   |   |   |   |
|  |    |    |    |    | 9  |   |   |   |   |   |
|  |    |    |    |    | 8  |   |   |   |   |   |
|  |    |    |    |    | 7  |   |   |   |   |   |
|  |    |    |    |    | 6  |   |   |   |   |   |
|  |    |    |    |    | 5  |   |   |   |   |   |
|  |    |    |    |    | 4  |   |   |   |   |   |
|  |    |    |    |    | 3  |   |   |   |   |   |
|  |    |    |    |    | 2  |   |   |   |   |   |
|  |    |    |    |    | 1  |   |   |   | X |   |
|  | -4 | -3 | -2 | -1 |    | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|  |    |    |    | -1 |    |   |   |   |   |   |
|  |    |    |    | -2 |    |   |   |   |   |   |
|  |    |    |    | -3 |    |   |   |   |   |   |
|  |    |    |    | -4 |    |   |   |   |   |   |
|  |    |    |    | -5 |    |   |   |   |   |   |
|  |    |    |    | -6 |    |   |   |   |   |   |
|  |    |    |    | -7 |    |   |   |   |   |   |
|  |    |    |    | -8 |    |   |   |   |   |   |
|  |    |    |    | -9 |    |   |   |   |   |   |

Skæringspunkt: \_\_\_\_\_

d) Beregn skæringspunktet imellem:

$$m: y = 4x - 8 \text{ og}$$

$$n: y = 2x + 1.$$

|  |    |    |    |    |    |   |   |   |   |   |
|--|----|----|----|----|----|---|---|---|---|---|
|  |    |    |    | y  | 10 |   |   |   |   |   |
|  |    |    |    |    | 9  |   |   |   |   |   |
|  |    |    |    |    | 8  |   |   |   |   |   |
|  |    |    |    |    | 7  |   |   |   |   |   |
|  |    |    |    |    | 6  |   |   |   |   |   |
|  |    |    |    |    | 5  |   |   |   |   |   |
|  |    |    |    |    | 4  |   |   |   |   |   |
|  |    |    |    |    | 3  |   |   |   |   |   |
|  |    |    |    |    | 2  |   |   |   |   |   |
|  |    |    |    |    | 1  |   |   |   | X |   |
|  | -4 | -3 | -2 | -1 |    | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|  |    |    |    | -1 |    |   |   |   |   |   |
|  |    |    |    | -2 |    |   |   |   |   |   |
|  |    |    |    | -3 |    |   |   |   |   |   |
|  |    |    |    | -4 |    |   |   |   |   |   |
|  |    |    |    | -5 |    |   |   |   |   |   |
|  |    |    |    | -6 |    |   |   |   |   |   |
|  |    |    |    | -7 |    |   |   |   |   |   |
|  |    |    |    | -8 |    |   |   |   |   |   |
|  |    |    |    | -9 |    |   |   |   |   |   |

Skæringspunkt: \_\_\_\_\_

Facit: (-2, -7) (1, 1) (3, 3) (4, 5) (4½, 10)

**Anvendelse af den rette linje til problemløsning - Grafisk problemløsning:**

Visse opgaver kan med fordel løses vha. Ligninger og deres Linjer. Dog vil der i disse opgaver ikke blive oplyst den ligning man skal bruge - men derimod skal man selv udlede den fra de informationer man får. Eksempel på dette giver et godt indblik i hvordan.

**Eksempel:** Sms forbrug.

En pige må bruge 200 kr om måneden på sin mobiltelefon. Hun skal finde ud af hvilket mobilabonnement hun skal vælge. Hun kan vælge imellem 2 typer:

**Abonnement A:** koster 0,3 kr pr sms og det månedlige abonnement er på 50 kr.

**Abonnement B:** koster 0,5 kr pr sms men til gengæld er der ikke noget abonnementspris.

**Spørgsmål:** Hvilket abonnement kan hun sende flest sms'er med, og derfor bedst?

Vi starter med at lavet de to abonnementer om til ligninger! Abonnement B er den nemmeste så lad os starte der. Vi forestiller os et koordinatsystem hvor der ud af x akslen er antal sms'er og y akslen forbruget i kr. Linjen der repræsenterer abonnement B må have en hældning på 0,5 kr fordi det koster 0,5 kr for hver sms pigen sender. Så derfor (se også skitse længere nede):

**Abonnement B:**  $y = 0,5x$

Abonnement A er lidt sværere fordi abonnements prisen skal lægges oven i det samlede forbrug. Så derfor må linjen starte ved y akslen ved 50 kr (0, 50). Hældningen er derimod kun 0,3 kr. Altså

**Abonnement A:**  $y = 0,3x + 50$  kr

Pigen må kun bruge 200 kr om måneden, så derfor må vi finde ud af hvor linjerne passerer 200 kr mærket på y akslen. Vi har derfor en situation som ser således ud for abonnement A:

$$0,3x + 50 = 200 \quad (\text{vi flytter 50})$$

$$0,3x = 150 \quad (\text{vi flytter 0,3 som bliver til division})$$

$$x = \frac{150}{0,3}$$

$$x = 500 \text{ sms'er}$$

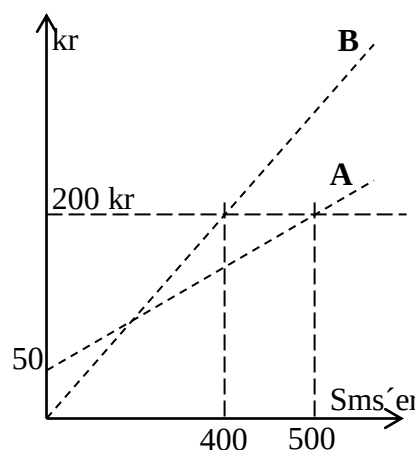
På abonnement A kan pigen derfor sende 500 sms'er om måneden!

Lad os se på abonnement B hvor vi kan gøre nøjagtig det samme:

$$0,5x = 200 \quad (\text{vi dividerer med 0,5})$$

$$x = \frac{200}{0,5}$$

$$x = 400 \text{ sms'er}$$



**Opgave 16:** Sms forbrug forsat.

Med udgangspunkt i forrige eksempel skal du beregne hvor mange sms'er pigen skal sende førend det kan betale sig at vælge abonnement A. (Hint: skæringspunkt)

**Opgave 17:** Sms forbrug igen igen.

*Hvor mange sms'er skal man sende om måneden før det kan betale sig at vælge abonnement C frem for D?*

**Abonnement C:** 0,25 kr pr sms og 50 kr i månedlig abonnement.

**Abonnement D:** 0,75 kr pr sms og 0 kr i månedlig abonnement.

**Opgave 18:** Mobilsnak forbrug

En dreng kan vælge imellem 2 abonnementer:

**Abonnement E:** 0,5 kr pr minut tale og 100 kr i månedlig abonnement.

**Abonnement F:** 0,70 kr pr minut tale og 0 kr i månedlig abonnement.

*Hvor mange minutter skal drengen tale i telefon om måneden førend abonnement E kan betale sig?*

|                                                             |
|-------------------------------------------------------------|
| <b>Facit:</b> $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$ 50 90 100 250 500 |
|-------------------------------------------------------------|

**Opgave 19:** Bilen der fik et forspring

To biler kører om kap. Bil nr 1 kører 80 km/t og har af forskellige årsager fået et forspring på 10 km. Bil nr 2 kører 100 km/t og har til gengæld ikke noget forspring.

*Hvor lang tid går der førend bil nr 2 overhaler bil nr 1?*

*Hvor mange km har bil nr 2 kørt før den overhaler bil nr 1?*

**Opgave 20:** Hvornår mødes de?

En bil kører med 90 km/t fra København mod Slagelse. På samme tid starter en bil med at køre fra Slagelse mod København med 70 km/t. Afstanden imellem København og Slagelse er 120 km!

*Hvor lang tid går der førend de to biler passere hinanden?*

**Ekstra Opgave 2:** Hvor mange sekunder?

To biler er placeret i således at der er 5 km imellem dem. De sætter i gang med 100 km/t og kører direkte imod hinanden. *Hvor mange sekunder går der før de to biler brager ind i hinanden?*

|                                                             |
|-------------------------------------------------------------|
| <b>Facit:</b> $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$ 50 90 100 250 500 |
|-------------------------------------------------------------|

**Ligefrem Proportionalitet:**

Hvis to forhold påvirker hinanden indbyrdes således, at *når den ene stiger så stiger den anden også* kaldes forholdet for **proportionelt**! Et eksempel på et forhold som er proportionelt kunne være løn og arbejdstid. Jo mere man arbejder jo flere penge tjener man (dog ikke altid)! Man siger også at:

*en fordobling af  $x$  (arbejdstid) giver en fordobling af  $y$  (lønnen)*

Altså må det gælde at:  $y = ax$  hvor  $a$  er en konstant!

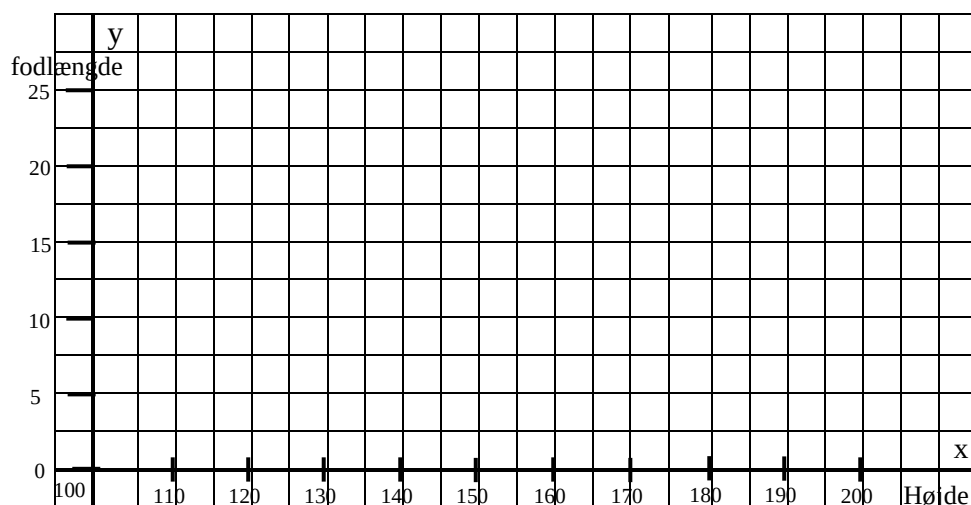
Hvis to forhold er proportionale vil de derfor give en retlinje i et koordinatsystem - det skal vi se på i den følgende opgave!

**Opgave 21:** Undersøg om en persons højde er proportional med personens fodlængde!

Man må formode at *jo højere man er, jo større fødder har man* - vi undersøger om det er rigtigt!

| Elev | Højde (cm) | Fodlængde(cm) | Elev | Højde (cm) | Fodlængde (cm) |
|------|------------|---------------|------|------------|----------------|
| 1    |            |               | 13   |            |                |
| 2    |            |               | 14   |            |                |
| 3    |            |               | 15   |            |                |
| 4    |            |               | 16   |            |                |
| 5    |            |               | 17   |            |                |
| 6    |            |               | 18   |            |                |
| 7    |            |               | 19   |            |                |
| 8    |            |               | 20   |            |                |
| 9    |            |               | 21   |            |                |
| 10   |            |               | 22   |            |                |
| 11   |            |               | 23   |            |                |
| 12   |            |               | 24   |            |                |

Plot punkterne ind og se om de følger en ret linje! Nogle af punkterne vil ligge over linjen og andre under. Dette er helt okay – så længe flertallet følger tendensen.



Aflæs hældningen for linjen: \_\_\_\_\_



**Omvendt Proportionalitet:**

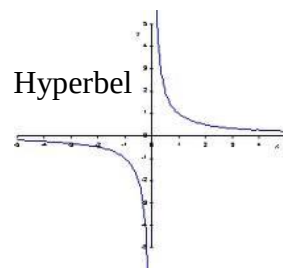
Når to forhold påvirker hinanden således, at når det ene forhold fordobles så halveres det andet kaldes forholdet for Omvendt Proportionalt! Et eksempel på dette kunne være: *jo hurtigere man kører, jo kortere rejsetid har man!* Netop dette forhold skal vi se nærmere på i følgende opgave!

Man siger også at:

*en fordobling af x (fart) giver en halvering af y (rejsetid)*

Når man har et proportionalt forhold følger det ligningen:

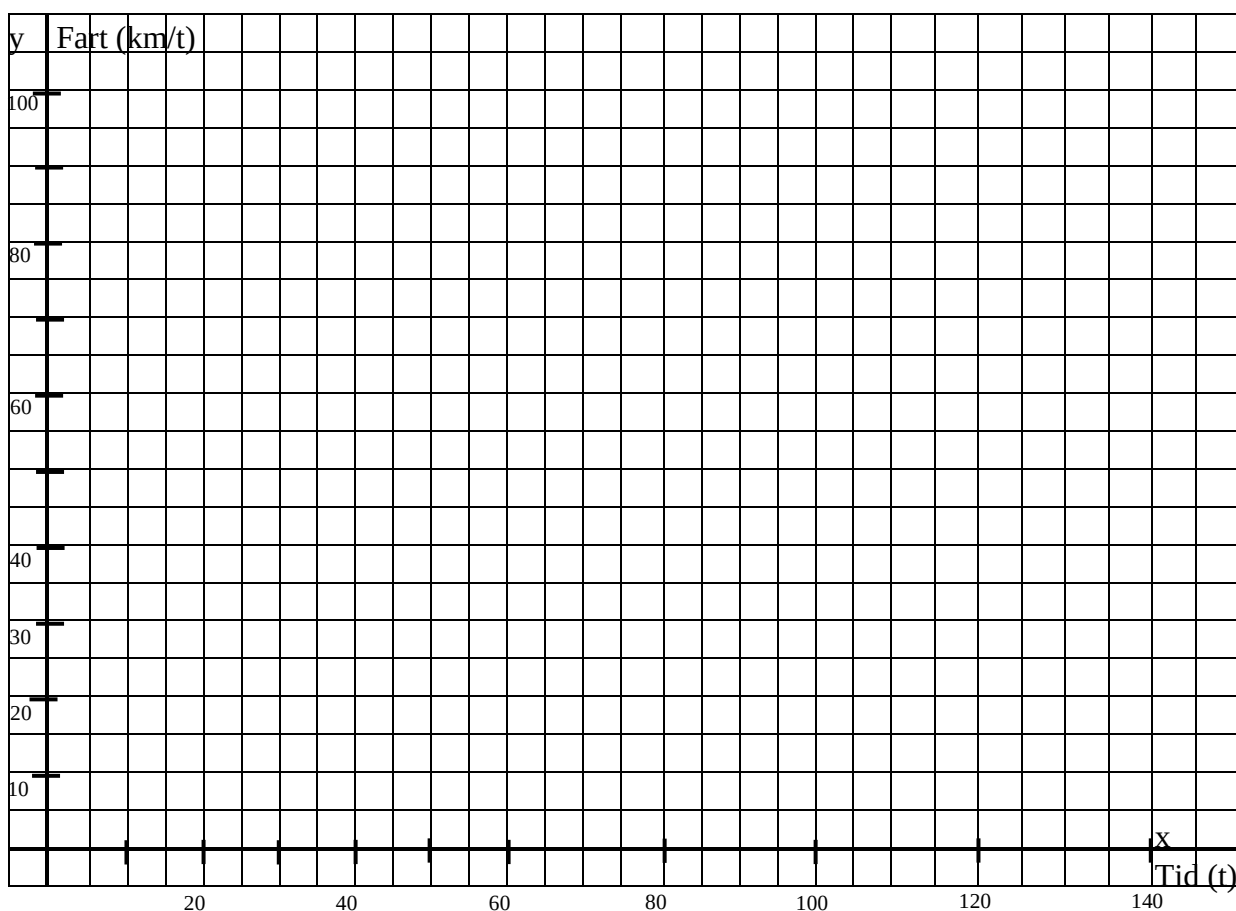
$$y = \frac{a}{x} \text{ hvor } a \text{ er en konstant}$$



**Opgave 22:** En bil skal køre 500 km! Beregn bilens fart (y) ved forskellige transporttider (x) og tegn det ind i koordinatsystemet! Brug følgende formel:

$$Fart(y) = \frac{500}{Tid(x)}$$

| Tid (x) | 4,55 | 5 | 5,56 | 7,14 | 10 | 16,67 | 25 | 50 | 70 | 100 | 150 |
|---------|------|---|------|------|----|-------|----|----|----|-----|-----|
| Fart(y) |      |   |      |      |    |       |    |    |    |     |     |





**Geogebra & Rette linjer:**

Geogebra er et gratis program som kan følgende:

- Tegne geometriske figurer (trekanter osv.)
- Tegne grafer.
- Lave diagrammer (bl.a. boksplot)

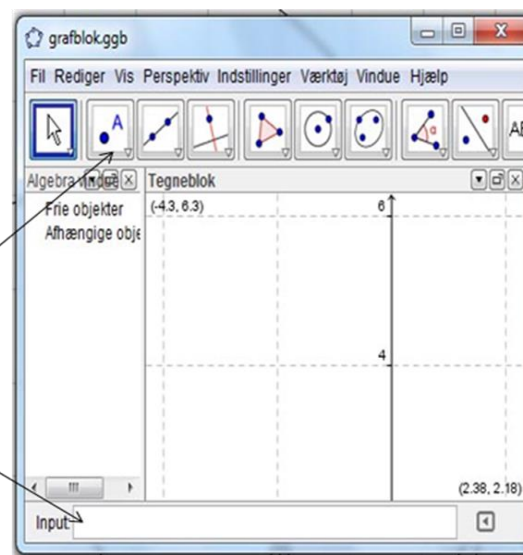


<http://www.geogebra.org>

I den følgende opgave skal man bruge geogebra til at finde resultatet!

**At skrive en ligning ind i Geogebra:**

Når man skal skrive ligninger ind i geogebra bruger man inputfeltet for neden. Hvis den ikke vises kan man få det frem ved trykke på menuen "vis" og vælge "inputfelt"! Prøve at skriv  $2x + 1$  i inputfeltet og tryk enter. Herefter skulle den gerne tegne hele linjen!

**At afsætte og aflæse et punkt i Geogebra:**

Når du skal aflæse et punkt på grafen kan det være en fordel at afsætte et punkt på linjen. F.eks. kunne det være, at man skal finde ud af hvor linjen skærer x-aksen! Dette gør man ved at trykke på nr 2 ikon i ikon menuen (se billedet). Når man har sat punktet der hvor den skærer x-aksen skulle den gerne skrive koordinatet i "Algebra vinduet" til venstre! Hvis dette vindue ikke er der kan det vises ved at trykke på menuen "Vis" og vælge "Algebra vindue". Geogebra skulle herefter gerne skrive  $A(-0.5, 0)$ .

**Pas på anderledes komma!**

Den opmærksomme matematik elev vil bemærke at -0.5 skrives anderledes da man normalt vil skrive -0,5! Grunden til dette er at Geogebra er et Amerikansk program og her bruger man . i stedet for , - ligesom de bruger miles, stones, inches og meget mere!

**Opgave 24:** Find linjernes skæring med x-aksen (kun x værdien!) med Geogebra!

- |                 |                                |                    |                                           |
|-----------------|--------------------------------|--------------------|-------------------------------------------|
| a) $y = 3x - 3$ | $x = \underline{\hspace{2cm}}$ | d) $y = 0,5x + 1$  | $x = \underline{\hspace{2cm}}$ (husk 0.5) |
| b) $y = 1x + 3$ | $x = \underline{\hspace{2cm}}$ | e) $y = -2x + 5$   | $x = \underline{\hspace{2cm}}$            |
| c) $y = 2x + 3$ | $x = \underline{\hspace{2cm}}$ | f) $y = -0,5x + 2$ | $x = \underline{\hspace{2cm}}$            |

**Facit:** -5 -3 -2 -1,5 1 2,5 3 4

**Beregning af 2 linjers skæringspunkt:**

I denne opgave skal vi se på hvordan man kan beregne skæringspunktet imellem 2 rette linjer. Dette kunne f.eks. være

- linje a:  $y = 3x + 4$
- linje b:  $y = -x + 12$

**Nr 1:** Lav et nyt dokument!

Vælg menuen ”fil” og ”ny”.

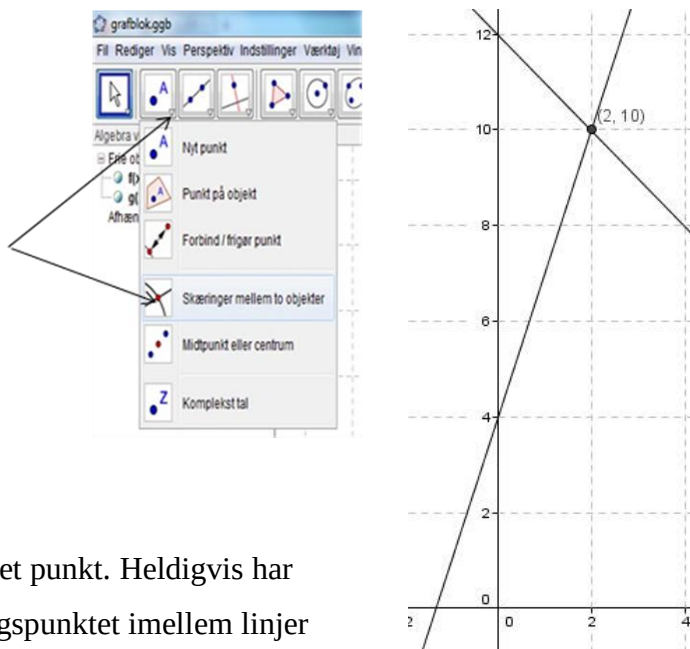
Man kan også CTRL-a og Delete

**Nr 2:** Indtast linjerne i inputfeltet

**Nr 3:** Aflæs skæringspunktet

Vi har nu 2 rette linjer som skærer hinanden i et punkt. Heldigvis har Geogebra også en funktion til, at finde skæringspunktet imellem linjer (eller andre objekter). For at finde skæringspunktet vælges ikon nr 2 på ikon menuen. Herefter kan man vælge ”Skæringer mellem to objekter”. Først trykkes på den ene linje og herefter den anden (se billedet)

Når skæringspunktet er fundet vil Geogebra angive x og y værdi for punktet ude til venstre i ”Algebra vinduet”!



**Opgave 25:** Find 2 linjers skæringspunkt med Geogebra!

a)  $y = 2x + 3$

c)  $y = 2x - 5$

$y = -x + 6$  Skæring: ( ; )

$y = 1,5x$  Skæring: ( ; )

b)  $y = 0,5x + 2$

d)  $y = x - 2$

$y = -0,5x + 6$  Skæring: ( ; )

$y = -1,5x + 5$  Skæring: ( ; )

**Ekstra Opgave 3:**

En dag skal en ambulanc transportere en alvorligt syg patient til lufthavnen. Ambulancens tur kan beskrives med ligningen:

$$y = 3x \quad \text{hvor } x = \text{kørt km og } y = \text{tid i min}$$

Samtidig starter en taxa fra lufthavnen, og kører til sygehuset. Taxaens tur kan beskrives med ligningen:  $y = -1,2x + 8,4$

Hvor langt fra sygehuset mødes de to biler?

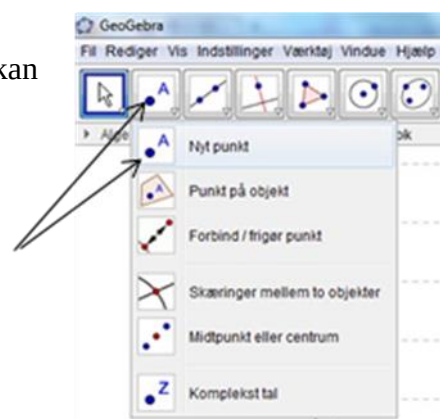
**Facit:** (½; 2) (1; 5) (2,8; 0,8) (2; 2) (4; 4) (10; 15) 2 8 10

**At finde linjens ligning ud fra 2 punkter med Geogebra:**

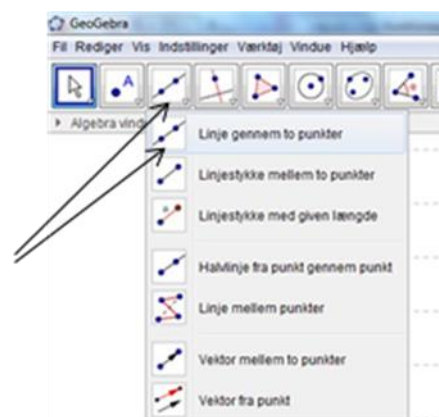
Hvis man har oplyst 2 koordinat punkter som ligger på en ret linje kan man også nemt bestemme denne linjes ligning!

**Nr 1: Afsætning af punkter**

Første afsættes de 2 punkter i geogebra! Dette gøres under ikon Nr 2 i menuen! (se billede). **HUSK** at lave et nyt dokument!

**Nr 2: Afsæt linjen gennem punkterne**

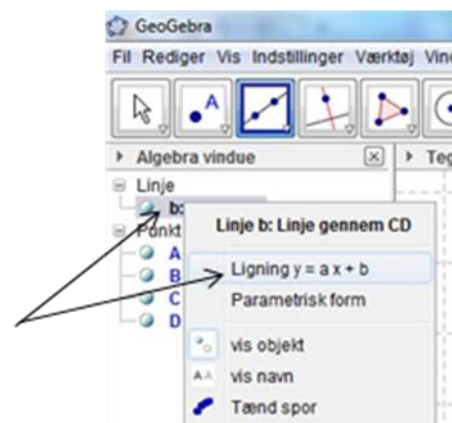
Under Ikon 3 kan man trække en linje igennem de to punkter (linje gennem to punkter)

**Nr 3: Aflæs linjens ligning.**

Geogebra giver linjens ligning på en anderledes måde end vi har lært. Derfor skal man bede den om det! Dette gøres ved at højre klikke på linjen geogebra har lavet i "Algebra Vinduet"! Herefter vælges  $y = ax + b$ . Herpå er det blot at aflæse ligningen!

**Ekstra Opgave 4: Find linjernes ligning ud fra 2 punkter!**

- |    |           |                                |
|----|-----------|--------------------------------|
| a) | A(2; 2)   |                                |
|    | B(4; 6)   | $y = \underline{\hspace{2cm}}$ |
| b) | A(-2; 4)  |                                |
|    | B(6; 12)  | $y = \underline{\hspace{2cm}}$ |
| c) | A(-4; 4)  |                                |
|    | B(12; 12) | $y = \underline{\hspace{2cm}}$ |
| d) | A(-4; 10) |                                |
|    | B(2; -8)  | $y = \underline{\hspace{2cm}}$ |

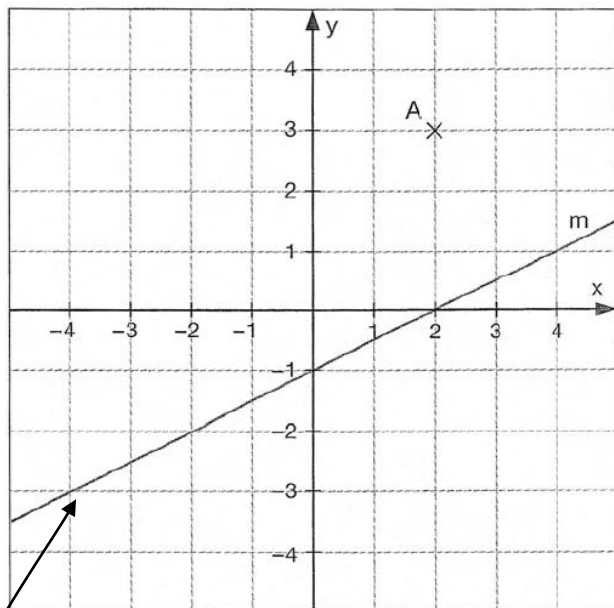
**Ekstra Opgave 5:**

I 2009 var der 510.500 mennesker i KBH (2009, 510500) . I 2019 regner man med at der er 539.500 mennesker (2019, 539500). Hvis man regner med at befolkningstilvæksten følger en lineær udvikling kan man ligge en ret linje igennem de to punkter og finde ligningen. Find denne!

*I geogebra sættes en punkt nemt ind ved at skrive (2009, 510500) i inputfeltet!*

**Facit:**  $-3x - 2$   $-x + 8$   $x + 6$   $0,5x + 6$   $2x - 2$   $8x + 2$   $29x + 501700$   $2900x - 5315600$

# Opgave 26: færdighedsregning



18. Punktet A's koordinater er ( , )

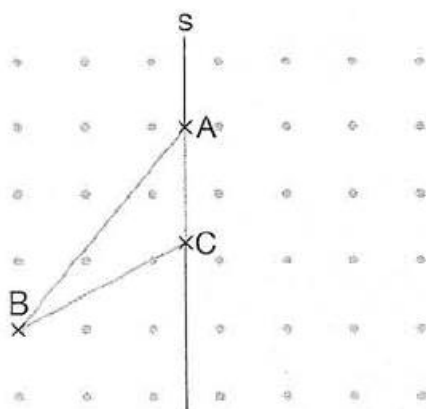
19. Indtegn:  $y = \frac{1}{2}x + 1$

20. Sæt ring om den ligning, der svarer til linjen m

$$y = 2x - 1$$

$$y = \frac{1}{2}x - 1$$

$$y = 2x + 1$$



42. Spejl trekant ABC i linien s.

23. Sæt kryds ved den funktionsforskrift, der passer til tabellen.

| x    | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
|------|----|----|---|---|---|
| f(x) | -3 | -1 | 1 | 3 | 5 |

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 1 \quad \square$$

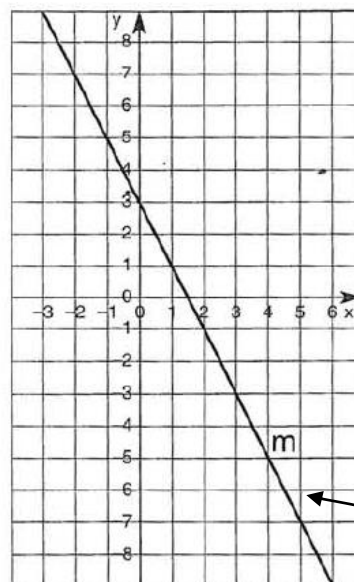
$$f(x) = 2x + 1 \quad \square$$

$$f(x) = 2x + 4 \quad \square$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x - 1 \quad \square$$

$$f(x) = x + 2 \quad \square$$

$$f(x) = x + \frac{x}{2} \quad \square$$



48. Den rette linje m skærer y-aksen

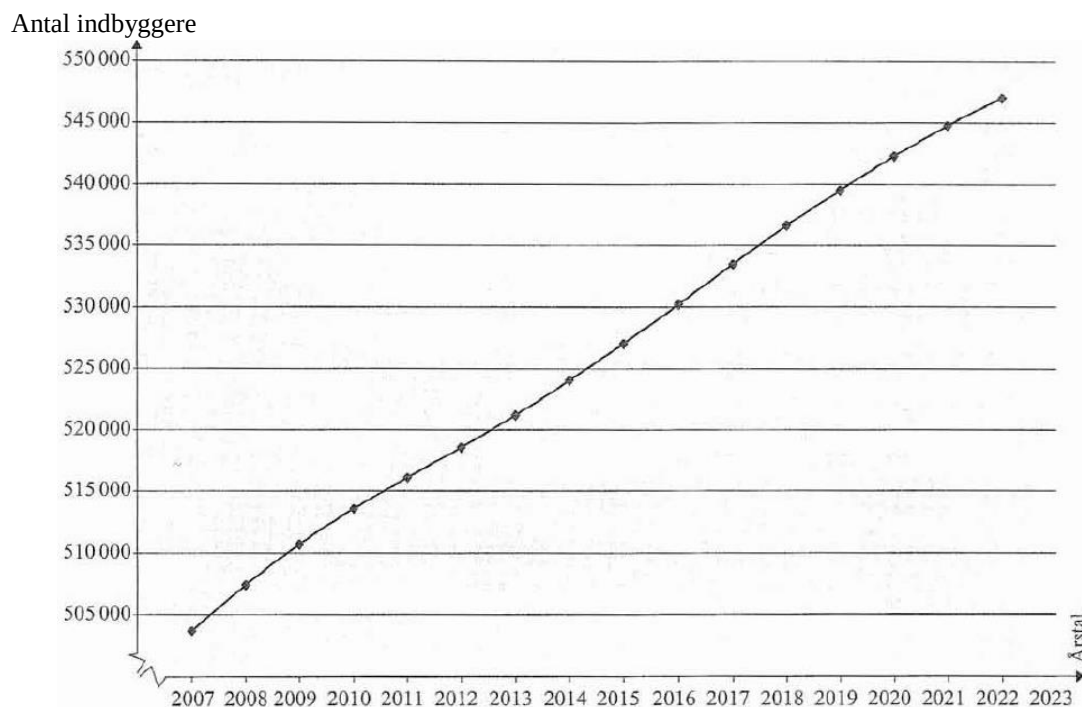
i punktet ( , )

49. Linjen m har hældningstallet

50. For linjen m gælder ligningen

y =

**Facit:** (0,3) (2,3) -2 ( $y = -2x + 3$ ) ( $y = \frac{1}{2}x - 1$ ) ( $y = 2x + 1$ )

**Ekstra Opgave 6: (2009dec)**

Grafen viser en prognose for Københavns befolkningsudvikling fra 2007 frem til år 2022.

1. Aflæs på grafen, hvor mange indbyggere der ifølge prognosen bor i København i 2019.
2. Beregn forskellen på, hvor mange der ifølge prognosen bor i København i 2009 og 2019.

Herunder er to matematiske modeller:

- Model 1:  $y = 2.900x - 5.316.000$
- Model 2:  $y = 2.900x + 501.700$

Hvor: x: årstal og y: indbyggere i København

3. Undersøg ved hjælp af beregninger, hvilken af de to matematiske modeller der bedst beskriver befolkningsudviklingen i prognosen. (**NB:** ikke i facit!)
4. Bestem, hvor mange indbyggere der efter denne model vil være i København i år 2030.
5. Hvornår vil der ifølge modellen være flere end 600.000 indbyggere i København?

**Facit:** 2040 2065 24.000 29.000 450.285 539.500 571.000 680.000

**Mundtlig Matematik:** Boligforeningens vandsparer

Du er medlem af bestyrelsen i den boligforening du bor i og får den ide, at man kan udskifte bruserne med vandbesparende brusere og derved spare vand og penge! Dog er der andre i bestyrelsen som påpeger nye brusere koster penge og at det ikke kan betale sig! Du sætter dig for at lave beregninger der kan overbevise modstanderne om at det virkelig er en god investering!

**Spørgsmål:** *Undersøg om det kan betale sig at skifte bruserne til vandsparende udgaver.* Du kan komme ind på følgende:

- Hvor mange brusere skal der købes og hvad koster det?
- Hvor mange mennesker bor der i boligforeningen, og hvor mange bade er der pr dag, pr år?
- Hvad koster 1 liter vand og hvad koster et gennemsnits bad?
- Opstil en funktion der viser hvordan udgifterne udvikler sig med de gamle brusere (x akse = dage, y akse = pris for vandforbrug, hældning = pris vand pr dag)
- Opstil en funktion der viser hvordan udgifterne udvikler sig med de nye brusere (x = dage, y = pris for vand - skæring med y akse = indkøbspris for brusere)
- Hvor lang tid gå der før investeringen er tjent hjem - gerne afbillede grafisk?

Vedlæg din besvarelse kompendiet!

**Data om vand pris:**

- Vand afregnes i  $\text{m}^3$  (kubikmeter)! Der er 1000 liter på  $1 \text{ m}^3$
- Pris  $1 \text{ m}^3$  varmt bruse vand: 80 kr

**Data om boligforeningen:**

- Antal lejligheder: 524
- Antal beboere pr lejlighed: 2,8 (gennemsnitligt)

**Bad data:**

- Badlængde pr beboer: 8,5 minut
- Bad hyppighed: hver 3 dag ud af 365 dage pr år



Nebia bruseren

**Gamle bruser:**

- Forbrug: 10-20 L i min!
- Pris: Gratis

**Safir Easy Clean 1F:**

- Forbrug: 6 liter i min
- Pris: 135 kr pr bruser

**Nebia bruser - Kickstarter:**

- Forbrug: 2,85 liter i min
- Pris: 2.000 kr pr bruser