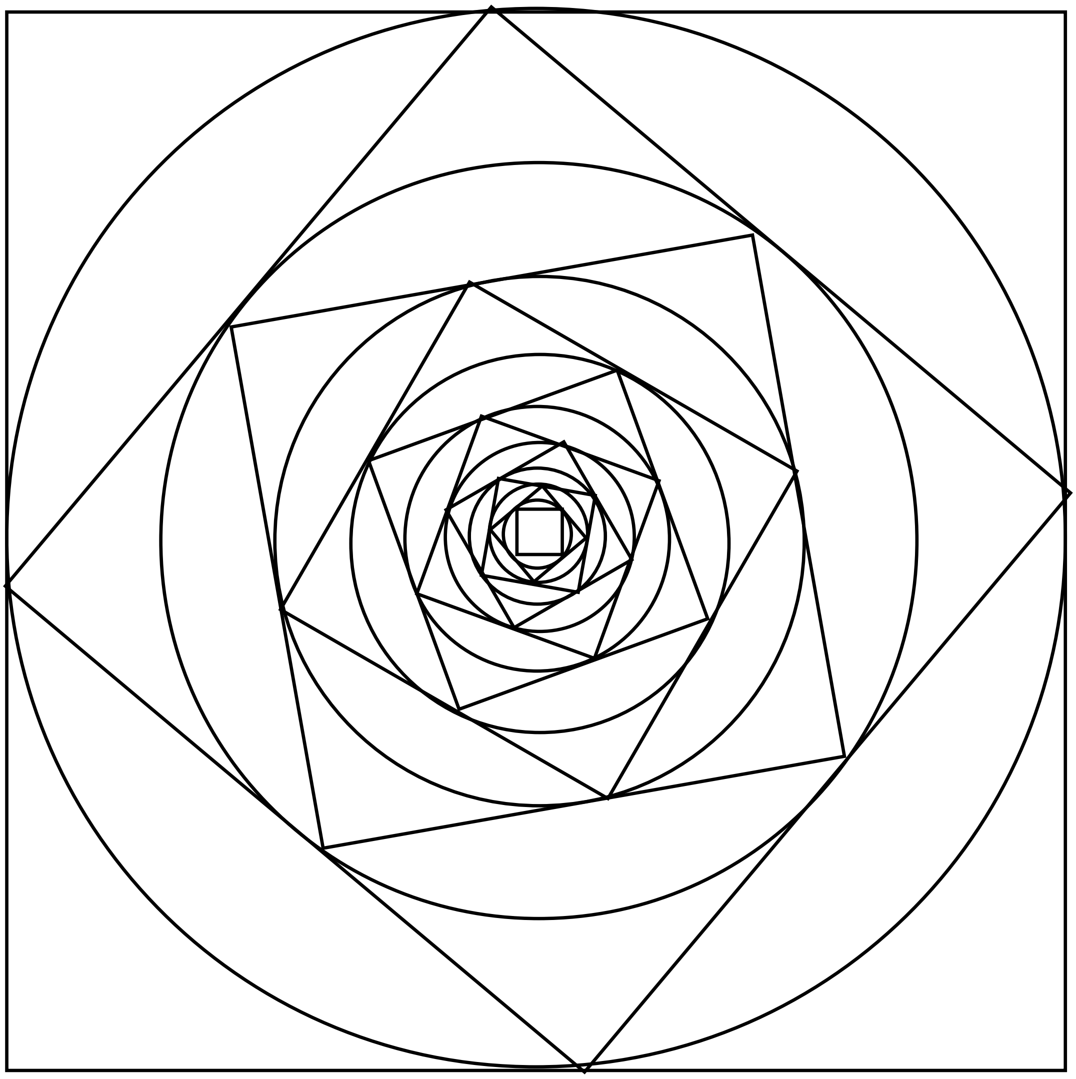
Tilhører: _______________

Min egen formelsamling & Noter

(Matematik)



1.0 Basal Matematik

1.1 Tal & Talsystemer

1.1.1 10 tals systemet.

I 10 talssystemet er der 10 tal (andre talsystemer har flere eller færre eks. Binær = 2 tal mens hextal har 16 tal). Et tal f.eks. 1321,253 består af cifre og et cifres position bestemmer hvor meget tallet er værd:

1000'erne	100'erne	10'erne	1'erne	1/10 (1 deci)	1/100 (2deci)	1/1000
1	3	2	1,	2	5	3

1321,253 = 1 * 1000 + 3 * 100 + 2 * 10 + 1 * 1 + 2 * 1/10 + 5 * 1/100 + 3 * 1/1000

Dvs:

11,3 < 11,302 (Tegnet < betyder mindre end – **husk** krokodillen spiser den store)

12,02 > 12,005 (Tegnet > betyder større end)

1.1.2 Usynlige ting

I matematik er der ofte usynlige ting som man ikke skriver men som er der alligevel:

Usynligt **plus** foran tal: 12 = +12

Usynlige **nuller** foran tal: 12 = 00000000012

Usynligt **komma** bagved tal: 12 = 12,00000000000

Usynlige **nuller bagved decimal**: 12,1 = 12,100000000000

1.1.3 Grupper af tal

- **Naturlige tal (N):** Hele tal større end 0 dvs. 1, 2, 3 osv.
- **Hele tal (Z):** Alle hele tal (også negative) dvs. -2, -1, 0, 1, 2, 3
- **Rationelle tal (Q):** Alle endelige decimaltal & brøker samt hele tal dvs. -1½, 0, ½, 1, 1½, 1,67
- **Irrationelle tal (R):** Alle som ikke kan skrives som endeligt decimaltal eks. $\sqrt{2}$, π osv.

1.1.4 Divisorer & Primtal.

Divisor: En divisor er et tal som går op i et andet helt tal et helt antal gange.

Divisorer: Et tals divisorer er de tal som går op i tallet et helt antal gange.

Eks: Divisorer til 12 = 1, 2, 3, 4 og 6

Primtal: Et tal med kun 2 divisorer 1 og tallet selv.

Primtal = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 osv.

1.2 De 4 regnearter

1.2.1 Addition/Plus

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\ \ 1\ \ } \\ 6,67 \\ +\ \ 5,67 \\ \hline \underline{\underline{12,34}} \end{array}$$

HUSK:

- *Resultatet af en addition kaldes for* ***summen***
- **Decimaltal:** Komma under komma

Eksempel & Note:

1.2.2 Subtraktion/Minus

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 10\ \ } \\ 1\ 2,\ \cancel{3}\ 4 \\ -\ \ \ 7,\ 4\ 5 \\ \hline 9 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} {\scriptstyle 10\ 10\ \ } \\ 1\ \cancel{2},\ \cancel{3}\ 4 \\ -\ \ \ 7,\ 4\ 5 \\ \hline 8\ 9 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} {\scriptstyle 10\ \ 10\ 10\ \ } \\ \cancel{1}\ \cancel{2},\ \cancel{3}\ 4 \\ -\ \ \ 7,\ 4\ 5 \\ \hline \underline{\underline{4,\ 8\ 9}} \end{array}$$

HUSK:

- *Resultatet af en Subtraktion kaldes for* ***differencen***
- Altid den største øverst!
- **Decimaltal:** Komma under komma

Eksempel & Note:

1.2.3 Multiplikation/Gange

```
                  3 4            3 4
   3 4            3 4            3 4
7,8 * 2,46     7,8 * 2,46     7,8 * 2,46
      1968           1968           1968
                    17220          17220
                                  19,188
```

HUSK:

- *Resultatet af en multiplikation kaldes for **produktet***
- Faktorernes orden er ligegyldig (6 * 3 = 3 * 6)
- Når du kommer til cifre nr 2 sættes et nul.
- Ved det tredje cifre sættes 2 nuller!
- **Decimaltal:** Glem at kommaerne er der og multiplicer normalt.
- **Decimaltal:** Sæt kommaet i resultat så mange pladser inde som der er decimaler i faktorerne

Eksempel & Note:

Flyt komma mod højre:

100 * 12,56 = 1256

1.1.4 Division

```
927 : 3 = 3     927 : 3 = 30     927 : 3 = 309
9               9                9
02              02                2
                 0                0
                 27               27
                                  27
                                  00 (rest)
```

Når divisionen ikke går op:

```
463   : 5 = 9
45
 13
```

```
463,0 : 5 = 92,
45
 13
 10
  30
```

```
463,0 : 5 = 92,6
45
 13
 10
  30
  30
  00
```

HUSK:

- Efter det sidste ciffer i et helt tal er der et komma og et uendeligt antal nuller.
- Når første decimal trækkes ned sættes komma i resultat.

Eksempel & Note:

Flyt komma mod venstre:

1256 : 100 = 12,56

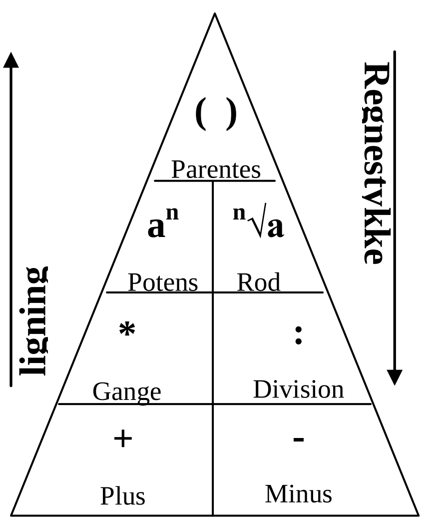
Efter tal står usynligt komma

1.2.5 Regnehierarki

Regnehierarkiet fortæller hvad som skal regnes først i et regnestykke. Således gælder det at gange og division altid kommer før plus og minus.

2 + 4 * 3 = 14 og ikke 18

NB: Når man løser en ligning skal man starte i bunden af regnehierarkiet!



1.3 Brøkregning

1.3.1 Basal

$$\frac{tæller}{nævner} = \frac{3}{4} = 3:4 = 0{,}75$$

- **Ægtebrøk:** Tæller er mindre end Nævner eks. $\frac{1}{2}$
- **Uægtebrøk:** Tæller er større end Nævneren eks. $\frac{5}{4}$
- **Blandet tal:** består af et helt tal og en Ægtebrøk eks. $1\frac{1}{4}$

1.3.2 Forkortning af Brøker:

Man forkorter en brøk ved at dividere tæller og nævner med det samme tal.

Forkortning med 5: $\frac{10}{15} \to \frac{10:5}{15:5} = \frac{2}{3}$

NB: *tallet man forkorter med skal gå op i både tæller og divisor.*

1.3.3 Plus & Minus af brøker

Man lægger to brøker sammen med fælles/ens nævnere ved at lægge tællerne sammen:

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{1+2}{4} = \frac{3}{4}$$

Man lægger to brøker sammen med forskellige nævnere ved at forlænge hver af brøkerne så de har fælles nævner. Herefter lægges tællerne sammen:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3*1}{3*4} + \frac{2*1}{2*6} = \frac{3}{12} + \frac{2}{12} = \frac{5}{12}$$

Sagt på en anden måde kan man også blot gange næverne med hinanden og derefter gange over kors:

$$\frac{1}{4} \quad \frac{1}{6} = \frac{1*6}{4*6} + \frac{1*4}{6*4} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$$

Eksempel & Note:

1.3.4 Multiplikation/Gange af Brøker

Man ganger to brøker med hinanden ved at gange tæller med tæller og nævner med nævner.

Eks: $\frac{1}{2}*\frac{3}{4}=\frac{1*3}{2*4}=\frac{3}{8}$

Eksempel & Note:

1.3.5 Division af brøker

Man dividerer to brøker med hinanden ved at gange med den omvendte brøk.

Eks: $\frac{1}{2}:\frac{1}{4}=\frac{1}{2}*\frac{4}{1}=\frac{1*4}{2*1}=\frac{4}{2}=2$

Eksempel & Note:

1.3.6 Fra uægte brøk til blandet tal

Finde ud af hvor mange hele gange nævneren går op i tælleren. Dette antal bliver det hele tal i det blandede tal. Det som er til rest placeres i tælleren og nævneren beholdes uændret

Eks 1: $\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$ fordi 4 : 3 = 1 med 1 til rest. **Eks 2:** $\frac{31}{28}=1\frac{3}{28}$ fordi 31 : 28 = 1 med 3 til rest.

Eksempel & Note:

1.3.7 Fra blandet tal til uægtebrøk

Man ganger det hele tal med nævneren og lægger tælleren til. Resultatet sættes ind som den nye tæller i brøken.

$\text{tal}\frac{tæller}{nævner}=\frac{tal*nævner+tæller}{nævner}$ **Eks:** $2\frac{1}{3}=\frac{2*3+1}{3}=\frac{7}{3}$

Eksempel & Note:

1.3.8 At lægge Blandede tal sammen

Hvis to blandede tal lægges sammen kan man gøre det på to måder.

- Lav de blandede tal om til brøker og læg dem sammen som brøker.
- Læg de hele tal sammen for sig og derefter brøkerne. Hvis brøken er en uægte brøk laves den om til et blandet tal som lægges sammen med det hele tal.

  Eks: $2\frac{3}{5}+3\frac{2}{5}=(2+3)+(\frac{3}{5}+\frac{2}{5})=5+\frac{5}{5}=6$

Eksempel & Note:

1.3.9 Fra decimaltal til brøk

Hvis tallet består af 2 decimaler kan man blot sætte decimalerne ind i tælleren og 100 i nævneren:

Eks: $0{,}82 = \frac{82}{100}=\frac{82:2}{100:2}=\frac{41}{50}$

1.3.10 Fra brøk til decimaltal

Følgende brøker skal læres udenad. Brøkerne kan bruges til at omskrive andre 2/5 = 40 % osv.

$\frac{1}{2}=0{,}5$ = **50 %**	$\frac{3}{4}=0{,}75$ = **75 %**	$\frac{2}{3}=0{,}\overline{666}$ = **66,66 %**	$\frac{1}{8}=0{,}125$ = **12,5 %**
$\frac{1}{4}=0{,}25$ = **25 %**	$\frac{1}{3}=0{,}\overline{333}$ = **33,33 %**	$\frac{1}{5}=0{,}2$ = **20 %**	$\frac{1}{10}=0{,}1$ = 1**0 %**

1.3.11 Helt tal gange eller divider med brøk

Lav det hele tal om til en brøk og benyt divisions og multiplikations reglen.

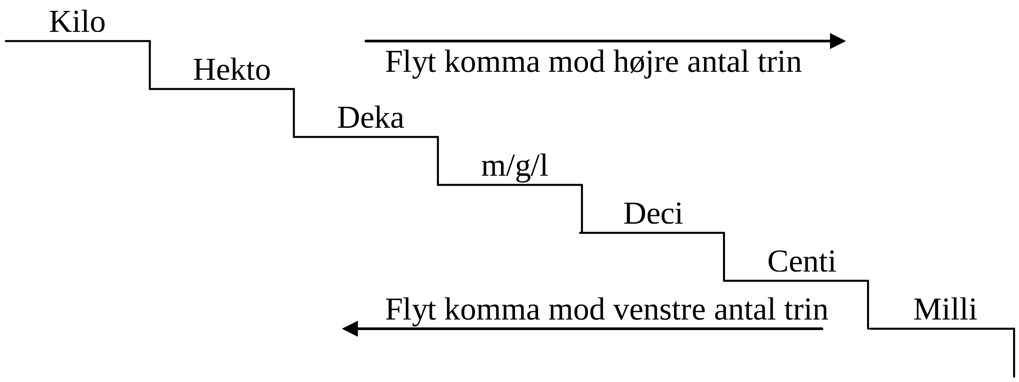
Eks: $2*\frac{3}{5}=\frac{2}{1}*\frac{3}{5}=\frac{6}{5}=1\frac{1}{5}$

Eks: $2:\frac{3}{4}=\frac{2}{1}:\frac{3}{4}=\frac{2}{1}*\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$

1.4 Enheder

1.4.1 SI-Enhed

	bogstav	betydning	Længde	Vægt	Liter
nano	n	1/1.000.000.000	nanometer (nm)	Nanogram (ng)	Nanoliter (nl)
micro	µ	1/1.000.000	Micrometer (µm)	Microgram (µg)	Microliter (µl)
milli	m	1/1000 el. 0,001	Millimeter (mm)	Milligram (mg)	Milliliter (ml)
centi	c	1/100 el 0,01	Centimeter (cm)	Centigram (cg)	Centiliter (cl)
deci	d	1/10 el 0,1	Decimeter (dm)	Decigram (dg)	Deciliter (dl)
		1	Meter (m)	Gram (g)	Liter (l)
deka	D	10	Dekameter (Dm)	Dekagram (Dg)	Dekaliter (Dl)
hekto	h	100	Hektometer (hm)	Hektogram (hg)	Hektoliter (hl)
kilo	k	1000	Kilometer (km)	Kilogram (kg)	Kiloliter (kl)
mega	M	1.000.000	Megameter (Mm)	Tons (t)	Megaliter (Ml)
giga	G	1.000.000.000	Gigameter (Gm)	Gigagram (Gg)	Gigaliter (Gl)



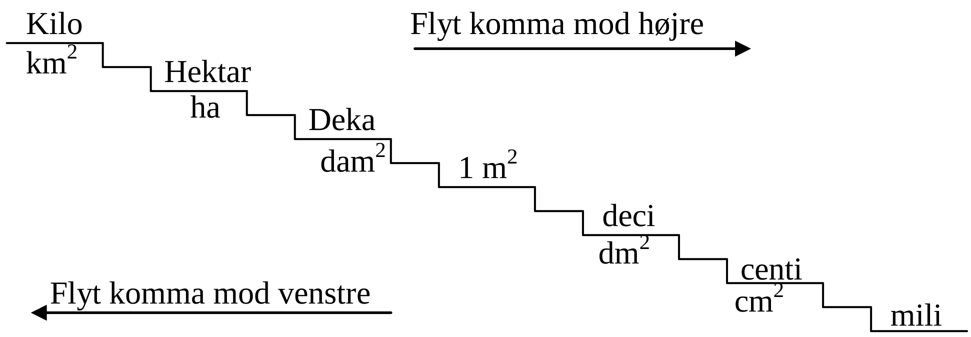
Huskeregel: kilo hekto deka bum deci centi millium.

- Kilo = 1000 (2 kilo = 2000 kr)
- Deci = decimering i den romerske hær (hver 10 mand blev slået ihjel)
- Centi = Century, cent
- Mili = *milie gracie* betyder *1000 tak på dansk*

Eksempel & Note:

1.4.2 Areal

Enhed	Areal	Symbol	Omregning	Antal
Kilo	Kvadratkilometer	km^2	1000*1000 m	1 km^2 = 1.000.000 m^2
hektar	Hektar	ha	100 * 100 m	1 ha = 10.000 m^2
deka	Kvadratdekameter	dam^2	10 * 10 m	1 dam^2 = 100 m^2
meter	Kvadratmeter	m^2	1 * 1 m	1 m^2
deci	Kvadratdecimeter	dm^2	1 / (10 * 10)	1 m^2 = 100 dm^2
centi	Kvadratcentimeter	cm^2	1 / (100 * 100)	1 m^2 = 10.000 cm^2
mili	Kvadratmilimeter	mm^2	1 / (1000 * 1000)	1 m^2 = 1.000.000 mm^2



Eksempel & Note:

1.4.3 Rumfang

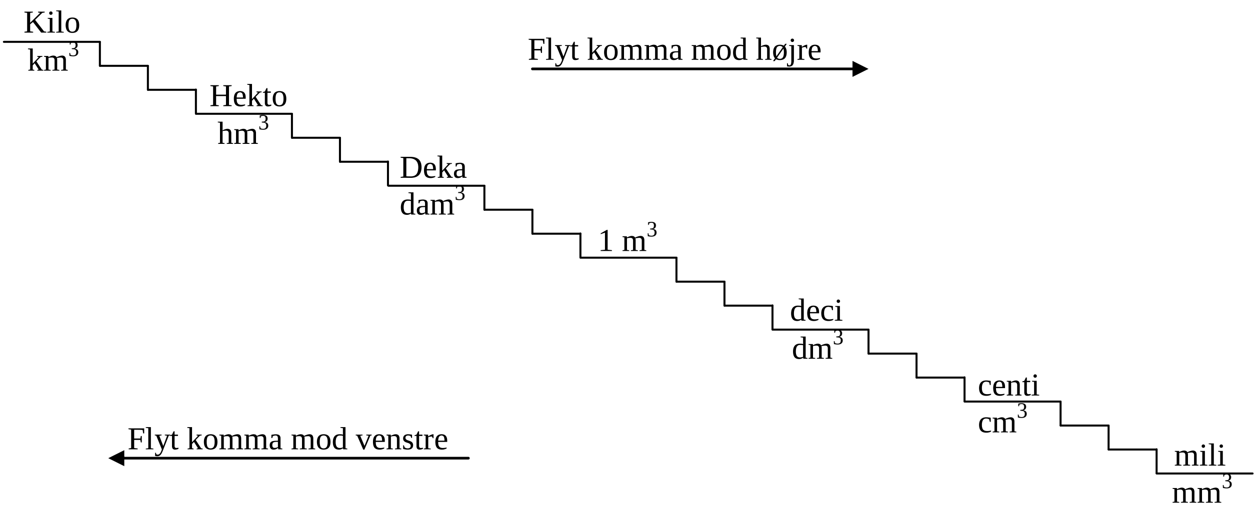
Enhed	**Areal**	**Symbol**	**Omregning**	**Antal**
Kilo	Kubikkilometer	km^3	1000*1000*1000 m	1 km^2 = 1.000.000.000 m^3
hektar	Kubikhektometer	hm^3	100 * 100 * 100 m	1 ha = 1.000.000 m^3
deka	Kubikdekameter	dam^3	10 * 10 * 10 m	1 dam^3 = 1.000 m^3
meter	Kubikmeter	m^3	1 * 1 * 1 m	1 m^3
deci	Kubikdecimeter	dm^3	1 / (10 * 10 * 10)	1 m^3 = 1.000 dm^3
centi	Kubikcentimeter	cm^3	1 / (100 * 100 * 100)	1 m^3 = 1.000.000 cm^3
mili	Kubikmilimeter	mm^3	1 / (1000*1000*1000)	1 m^3 = 1.000.000.000 mm^3

Omregning til litermål:

1000 Liter = 1 m^3

1 liter = 1 dm^3

1 ml = 1 cm^3



Eksempel & Note:

1.5 Afrunding

Når man afrunder skal man se på det tal der står <u>til højre</u> for det ciffer man skal afrunde til. Hvis tallet er <u>5 eller derover skal cifret rundes op</u>! Hvis det er 4 eller mindre skal man ikke gøre noget!

Tal	1	2	3	**5,**	2	3	4
Plads	*1000*	*100*	*10*	*1'er*	*1 decimal*	*2 decimal*	*3 decimal*

Eksempler:

Afrunding til 1 decimal: 12,05 ≈ 12,1 eller 12,049 ≈ 12,0

Afrunding til 2 decimal: 12,127 ≈ 12,13 eller 12,121 ≈ 12,12

Afrunding til 3 decimal: 13,3949 ≈ 13,395 eller 13,3942 ≈ 13,394

Afrunding til helt tal: 19,7 ≈ 20 eller 19,18 ≈ 19

Afrunding til hele antal 10'ere: 26,4 ≈ 30 eller 24,9 ≈ 20

Afrunding til hele antal 1000'nere: 5605 ≈ 6000 eller 5499 ≈ 5000

Tegnet ≈ betyder at tallet afrundes og derfor ikke er

Eksempel & Note:

Kroner & Øre:
Ned: 0 – 24 øre (5,20 ≈ 5,00 kr)
50 øre: 25 – 74 (5,27 ≈ 5,50 kr)
Op: 75 – 99 (5,76 ≈ 6,00 kr)

1.6 Tidsberegninger

1.6.1 Klokkeslæt subtraktion

Husk: Når man låner 1 time bliver det til 60 minutter altså til 6 i mente – se eksempel.

Eksempel & Note:

	10		6	
$\cancel{1}$	$\cancel{1}$	:	1	3
	8	:	3	0
	2	:	4	3

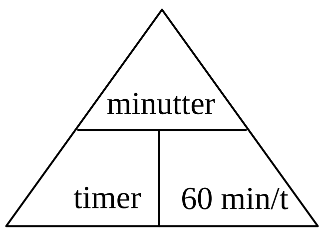
1.6.2 Tids-omregninger

Fra timer til minutter: 2,55 t = 2,55 t * 60 min/t = 153 min

Fra minutter til timer: 153 min = 153 / 60 min/t = 2,55 t

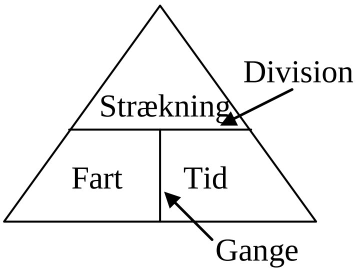
Fra klokkeslæt til minutter: 5:32 → 5 t * 60 min/t + 32 min = 332 min

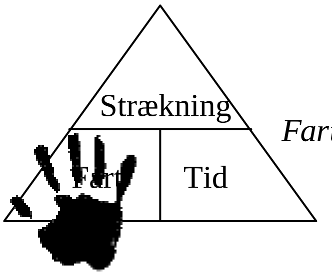
Fra klokkeslæt til timer: 5:32 → 32min / 60 min/t + 5t = 5,53 timer



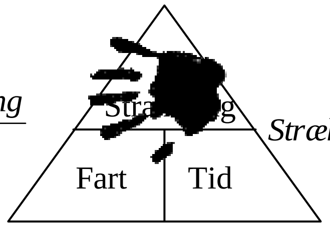
1.7 Regnetrekanter

En regnetrekant kan bruges i situationer hvor *man har 3 variable*! (variabel er et forhold/indstilling som kan have forskellige værdier dvs. varieres: længde, vægt, tid). Regnetrekanten kan i sådan et tilfælde være et hjælpemiddel til at finde en af variablene hvis man kender de 2 andre.





$$Fart = \frac{Strækning}{Tid}$$



$$Strækning = Fart * Tid$$

1.8 Potensregning

1.8.1 Potensregneregler

Rod$^{\text{Eksponent}}$

$2^3 = 2 * 2 * 2 = 8$

$2^4 * 2^3 = 2^{(4+3)} = 2^7 = 128$

$\frac{2^4}{2^3} = 2^{(4-3)} = 2^1 = 2$

Potens Regneregler:

1) $a^s * a^r = a^{(s+r)}$
2) $\frac{a^s}{a^r} = a^{(s-r)}$
3) $a^0 = 1$
4) $a^{-s} = \frac{1}{a^s}$
5) $(a^r)^s = a^{(r*s)}$
6) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
7) $(a*b)^n = a^n * b^n$

NB: *Regel 1 og 2 gælder kun hvis rødderne er ens og potenserne ganges eller divideres med hinanden!*

1.8.2 Kvadratrod

Kvadratroden af et tal er det tal som ganget med sig selv giver det oprindelige tal .

$\sqrt{4} = 2$ fordi $2 * 2 = 4$

Kvadratrod Regneregler:

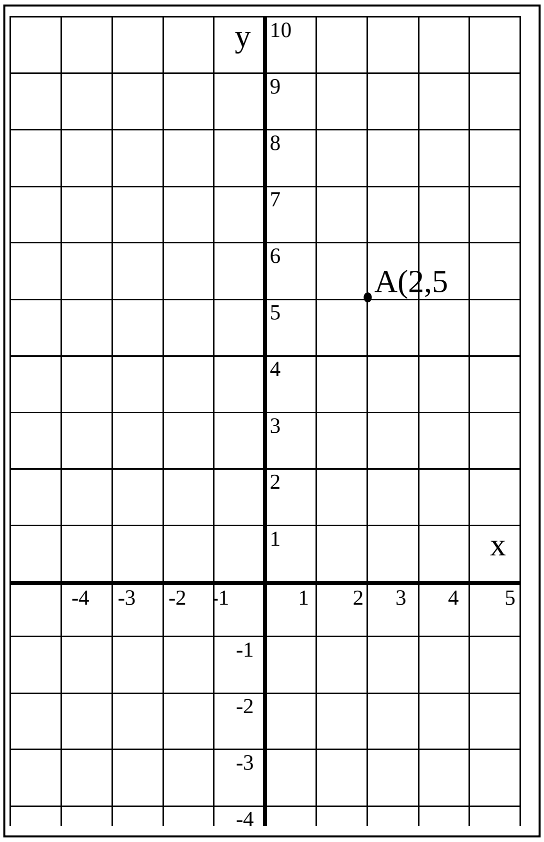
1) $\sqrt{a*b} = \sqrt{a} * \sqrt{b}$
2) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
3) $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$
4) $\sqrt{a^2} = a$

NB: *Man kan ikke tage kvadratroden af et negativt tal.*

1.9 Koordinatsystemet

1.9.1 X og Y aksen

Et koordinatsystem består af en x akse (vandret) og **y akslen** (lodret). Det punkt hvor de to akser krydser hinanden kaldes for **Origo** (nulpunktet).



Huskeregel: *Y aksen er den lodrette fordi tegnet Y danner en lodretstreg.*

1.9.2 Koordinatpunkt

Et koordinatpunkt angiver et punkt i koordinatsystemet. Derfor er der brug for 2 tal en x- og en y værdi:

(x, y)   eks: A(2, 5)

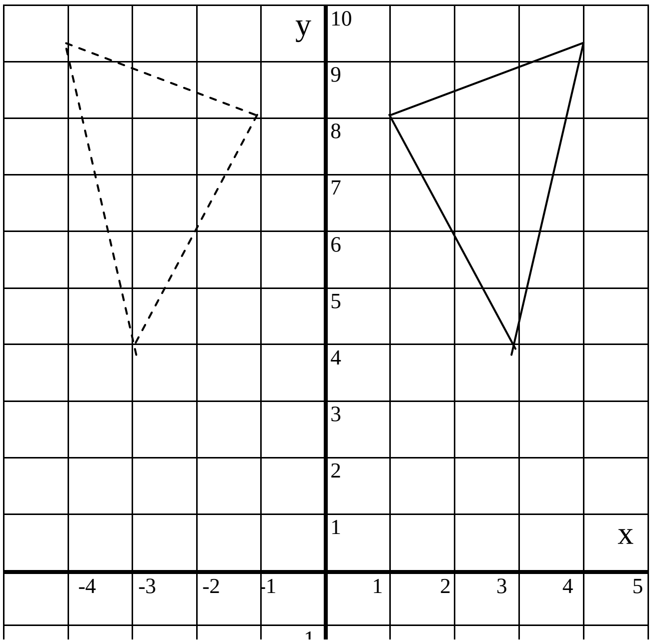
hvor 2 er **x koordinaten** og 5 er **y** koordinaten og kan oversættes til 2 ud af x og 5 op af y

Huskeregel: *XX er pige og XY er dreng. Pigen før drengen x før y i koordinatsættet. (den oprejste akse er drenge aksen!). Eller: hen af gaden op til Yvonne.*

1.9.2 Spejling

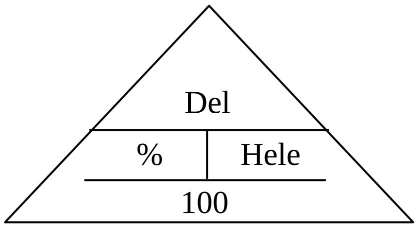
Man spejler en figur ved at spejle hvert af punkterne i figuren.

Man spejler et punkt ved at måle punktets afstand indtil spejlet (den vinkelrette afstand). Herefter afsættes det spejlede punkt i en tilsvarende afstand bag ved spejlet. Spejlet kan være y-asken eller x-aksen men teknisk set kan det være alle rette linjer der fungere som et spejl.



1.10 Procentregning

Pro betyder per og cent betyder 100. Procent kan derfor oversættes til: per 100. Hvis man derfor har 25 procent betyder det 25 per 100.



Vigtigt: Husk først at dividere med 100!!!!!

1.10.1 At tage procenten af et tal (at finde procentdelen)

$$Del = \frac{\%}{100} * Hele$$

eks. 25 % af 200 kr = $\frac{25}{100}$*200 = 0,25 * 200 = 50 kr

Eksempel & Note:

Hovedregning:

20 % af 100 kr = 20 kr

30 % af 100 kr = 30 kr osv.

20 % af 300 kr

20 kr rabat for hver 100 kr => 60 kr

1.10.2 At finde procenten

$$\% = \frac{Del}{Hele} * 100$$

Eks: 50 kr ud af 200 kr = $\frac{50}{200} * 100 = 25$ %

Eksempel & Note:

1.10.3 At regne baglæns (og finde det hele)

$$Hele = \frac{Del}{\%} * 100\%$$

Eks: 50 kr er 25 % - hvad er det hele = $\frac{50}{25} * 100$ = 200 kr

Eksempel & Note:

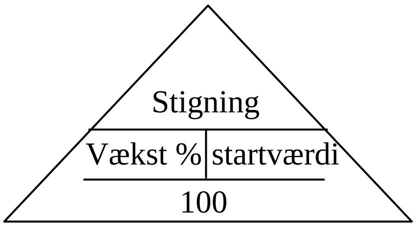
1.10.4 Promille

Promille (‰) gælder samme formler blot med 1000.

$$Del = \frac{‰}{1000} * Hele \qquad ‰ = \frac{Del}{Hele} * 1000 \qquad Hele = \frac{Del}{‰} * 1000\%$$

1.10.5 At finde Stignings/Vækstprocent

Bruges til at beregne hvor mange procent noget er vokset/steget fra start- til slutværdi.



$$vækst\% = \frac{stigning}{startværdi} * 100 = \frac{(slutværdi - startværdi)}{startværdi} * 100$$

Husk: Divider altid med startværdien.

Eks: Antallet af elever i en klasse vokser fra 20 til 25. Vækstprocenten er?

$$\text{Vækst\%} = \frac{(25-20)}{20} * 100 = 25\ \%$$

1.10.6 At finde stigningen ud fra vækstprocenten

$$stigning = \frac{Vækst\%}{100} * startværdi$$

Eks: Antallet af elever i en klasse er vokset med 25 % fra 20 elever. Hvor mange elever er der kommet ind i klassen?

$$\text{Stigning} = \frac{25\%}{100} * 20 \text{ elever} = 5 \text{ elever}$$

1.10.7 At finde slutværdien ud fra vækstprocenten.

$$slutværdi = \frac{(100\% + Vækst\%)}{100} * startværdi$$

Eks: Antallet af elever i klassen er vokset med 25 % fra 20 elever. Hvor mange elever er der nu?

$$\text{Slutværdi} = \frac{(100 + 25\%)}{100} * 20 \text{ elever} = 25 \text{ elever.}$$

1.10.8 Vækst over flere år

$$\text{Slutværdi} = \text{Startværdi} * \left(\frac{100\% + vækst\%}{100}\right)^n \quad \text{hvor n = antal perioder/år.}$$

Eks: befolkning på 20.000 vokser med 2 % pr år. Hvor mange er der om 5 år?

$$\text{Slutværdi} = 20.000 * \left(\frac{100\% + 2\%}{100}\right)^5 = 22.082 \text{ mennesker}$$

1.11 Målestoksforhold

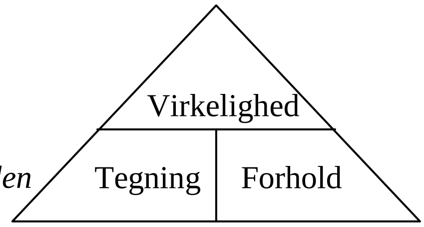
En målestokstegning er en nøjagtig formindsket kopi af et område/ting fra virkeligheden!

Hvis en tegning er en målestokstegning vil der et sted på tegning være angivet det forhold tegningen er tegnet i. Dette kunne være:

1 : 25 som betyder at

1 cm på papiret = 25 cm i virkeligheden.

3 : 1 (omvendt forhold) hvor *3 cm på tegning = 1 cm i virkeligheden*



Huskeregel: Velkommen **T**il **F**acebook

1.11.1 Fra virkeligheden til tegning

Tegnings mål = $\dfrac{Virkelighedensmål}{Målestoksforhold}$

Husk: lav altid de virkelige mål om til cm før du benytter formlen.

Eks: tegn et kvadrat med siden 6 meter i målestoksforholdet 1:200.

kassens længde = $\dfrac{600cm}{200}$ = 3 cm på tegning (de 6 m = 600 cm)

Eksempel & Note:

1.11.2 Fra tegning til virkelighed

Virkelighedens mål = Tegningens mål * Målestoksforhold

Husk: resultatet er altid i cm!

Eks: En seng er 3 cm på en tegning tegnet i forholdet 1:60

Sengens længde = 3 cm * 60 = 180 cm = 1,8 m

Eksempel & Note:

1.11.3 At finde målestoksforholdet for en tegning

Målestoksforhold = $\dfrac{Virkelighedensmål}{Tegningensmål}$

Husk: lav de virkelige mål om til cm først!'

Eks: 5 km på kortet svarer til 4 på tegningen. Vi husker først at lave km til cm!

Målestoksforhold = $\dfrac{500.000cm}{4cm}$ = 125.000 dvs. 1 : 125.000

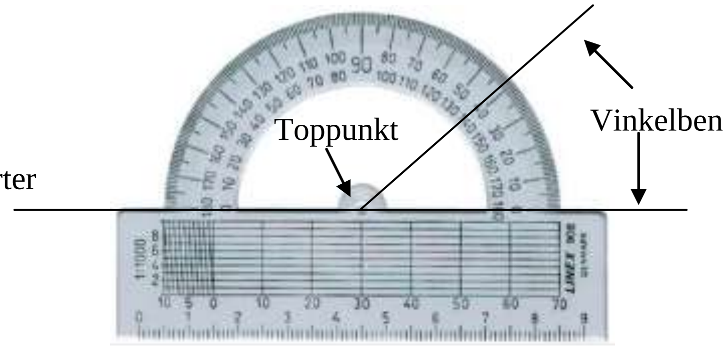
Eksempel & Note:

2.0 Geometri:

2.1 Vinkler & Linjer

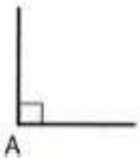
2.1.1 Brug af vinkelmåler

Husk: Start altid med den scala der starter med nul

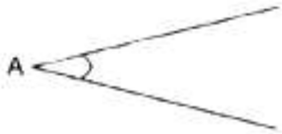


2.1.2 Vinkel typer

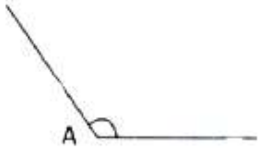
Retvinkel: 90 °



Spidsvinkel: under 90 °



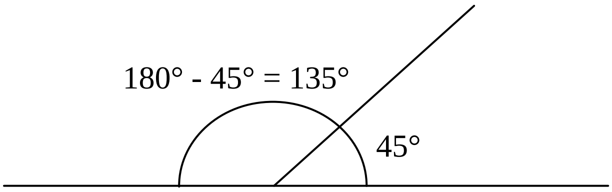
Stumpvinkel: Over 90 °



2.1.3 Nabovinkler (supplements vinkler)

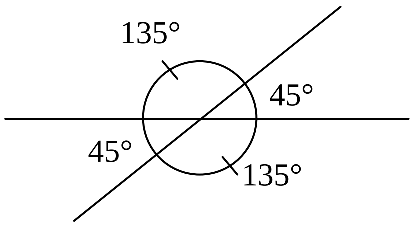
Vinkler der ligger op af hinanden kaldes for nabovinkler.

I de tilfælde hvor de to vinkler tilsammen danner 180° eller 360° kan man beregne den ene hvis man kender den anden. Grunden til dette er at de tilsammen giver 180° el. 360°.



2.1.4 Topvinkler

Vinkler der har det samme toppunkt og dannes af 2 rette linjer vil parvis være ens. (modstående vinkler er ens!)

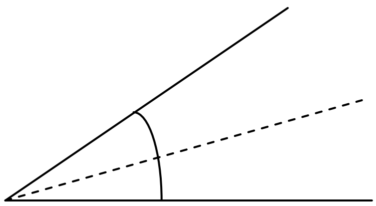


2.1.4 Vinkelhalveringslinje

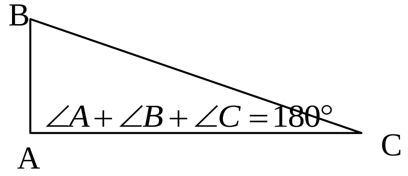
Den linje der halverer vinklen.

Eks: Hvis vinklen er 60° er vinkelhalveringslinjen 30°.

Hvordan findes vinkelhalveringslinjen med passer?



2.1.5 Navngivning af vinkler i trekanter og firkanter



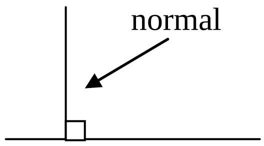
Oftest vil man angive en vinkel med $\angle$ *og derefter Bogstavet for kanten.*

Hvis man vil være nøjagtig kan man også angive vinklen i f.eks. en trekant ved at angive kanterne før og efter. Vinkel A bliver herved til $\angle$BAC. *Her skal man kigge på det midterste bogstav*!

2.1.6 Navngivning af Linjestykker

Et linjestykke f.eks. fra kant A til B i en trekant benævnes ofte som $|AB|$. *De to streger udenom fortæller at der er tale om et linkestykke.*

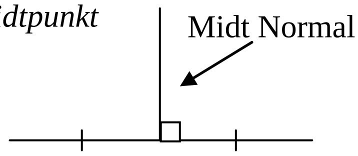
2.1.7 En Normal



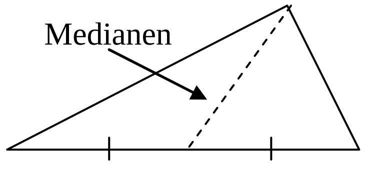
En normal er en linje der står vinkelret på en anden linje

2.1.8 Midt Normal

En midtnormal er en linje der står vinkelret på en anden linje i dens midtpunkt



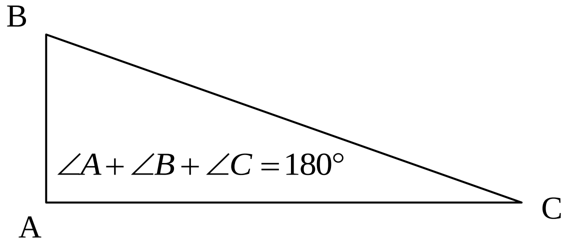
2.1.9 Medianen



En median er en linje der går fra en kant til den modstående sides midtpunkt.

2.2 Trekanter:

2.2.1 Trekantens Vinkelsum



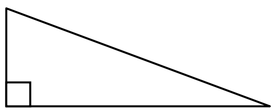
Vinkelsummen = 180º ($\angle$A+$\angle$B+$\angle$C)

Beregning af vinkel A = 180 º - $\angle$B - $\angle$C.

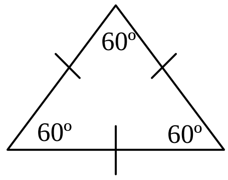
Eksempel & Note:

2.2.2 Trekant typer

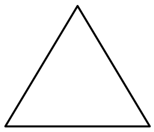
Retvinklet: Trekanten har en ret vinkel



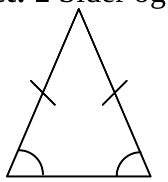
Ligesidet: Alle sider er lige lange



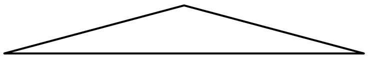
Spidsvinklet: Alle 3 vinkler er spidse.



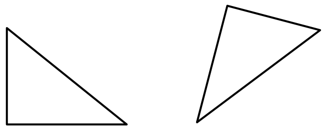
Ligebenet: 2 Sider og 2 vinkler er lige store



Stumpvinklet: En af vinklerne er stump.

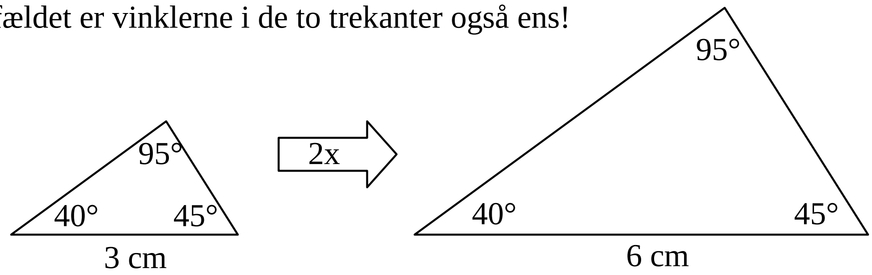


Kongruente Trekanter: Ens trekanter



Ligedannede Trekanter: 2 trekanter hvor den ene er en forstørret udgave af den anden

Når dette er tilfældet er vinklerne i de to trekanter også ens!

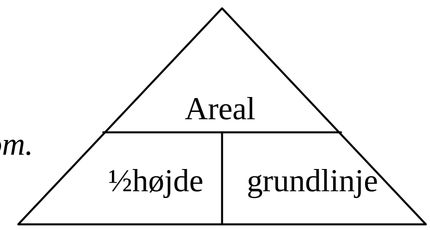


2.2.3 Trekantens areal:

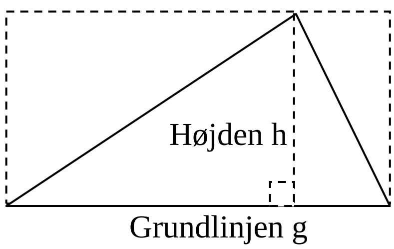
Areal = ½ * højde * grundlinje = $\frac{højde * grundlinje}{2}$

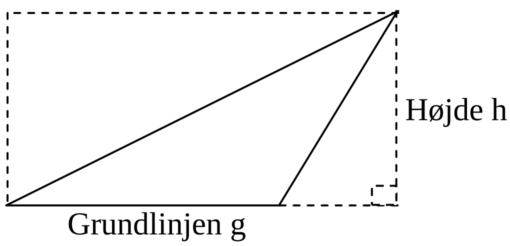
Huskelregel: Trekantens *areal er det halve af firkanten udenom.*

Højde = $\frac{2 * Areal}{grundlinje}$ Grundlinje = $\frac{2 * Areal}{højde}$



Husk: I trekanten er der 3 højder (tilhørende 3 grundlinjer). Når du beregner areal kan du frit vælge den højde og medfølgende grundlinje du vil bruge.

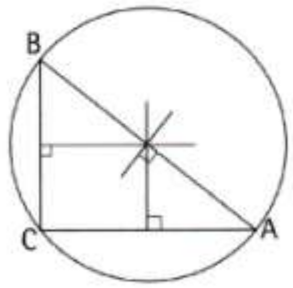




2.2.4 Den omskrevnecirkel.

Centrum er midtnormalernes skæringspunkt.

Huskeregel: Den Nomskrevne cirkel.

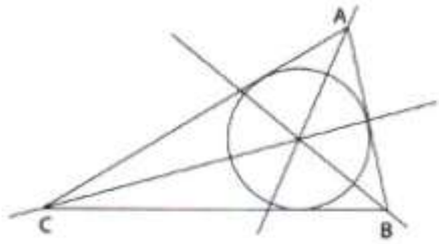


Eksempel & Note: (hvad er en midtnormal)

2.2.5 Den indskrevnecirkel

Centrum er vinkelhalveringslinjernes skæringspunkt

Huskeregel: Den vindskrevne cirkel.



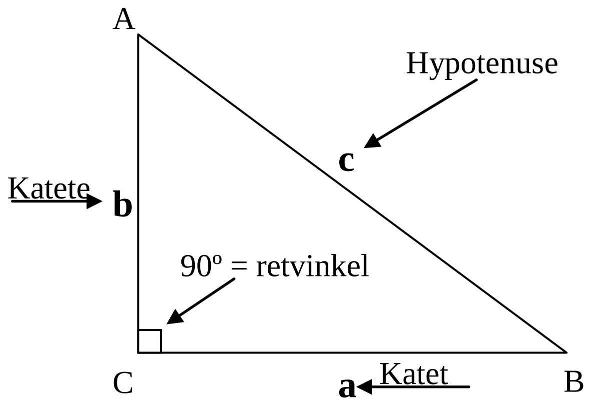
Eksempel & Note: (hvad er en vinkelhalveringslinje)

2.2.6 Pythagoras

$c^2 = a^2 + b^2$ *(gælder kun for retvinklede trekanter)*

c = $\sqrt{(a^2 + b^2)}$

Husk: Hypotenusen er altid den længste side i trekanten



Eksempel & Note:

At finde kateten:

$a^2 = c^2 – b^2$

a = $\sqrt{(c^2 - b^2)}$

Eksempel & Note:

2.2.7 Omvendt Pythagoras

Hvis man er i tvivl om en trekant er retvinklet kan man sætte siderne ind i Pythagoras formel og se siderne får formlen til at gå op.

Eksempel & Note:

2.2.8 Pythagoræisk triplet

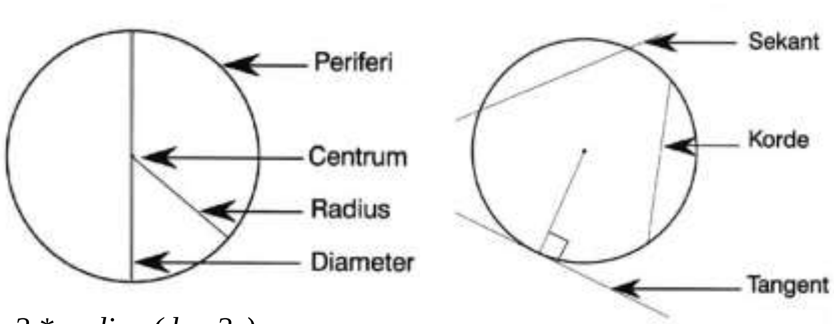
En trekant hvor alle sider er hele tal kaldes for et pythagoræisk triplet.

Den simpleste er 3, 4 og 5.

3	4	5
5	12	13
6	8	10
7	24	25
8	15	17
9	12	15
10	24	26
12	16	20
20	21	29

Eksempel & Note:

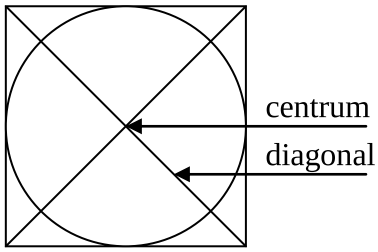
2.3 Cirklen:



*Diameter = 2 * radius (d = 2r)*

2.3.1 Cirklens Centrum

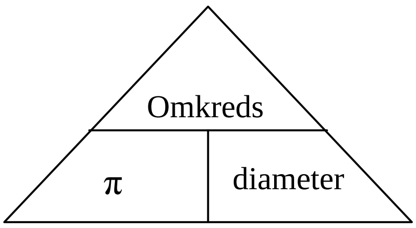
Cirklens centrum findes ved at tegne et kvadrat udenom cirklen således at cirklen lige netop rør alle 4 sider. Tegn herefter kvadratets diagonaler og der hvor de skærer hinanden er cirklens centrum.

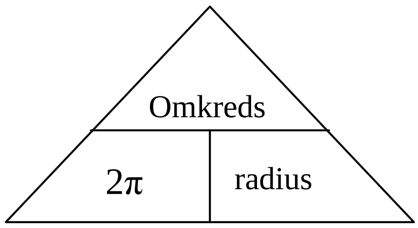


2.3.2 Cirklens Omkreds

Omkreds = $2 * \pi * r = \pi * d$

(**huskeregel:** 2 piger)



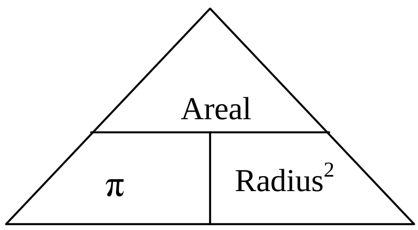


Eksempel & Note:

2.3.3 Cirklens Areal

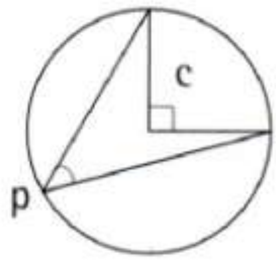
Cirklen Areal = $\pi * r^2$

$$r = \sqrt{\left(\frac{Areal}{\pi}\right)}$$



Eksempel & Note:

2.3.4 Cirkelvinkler



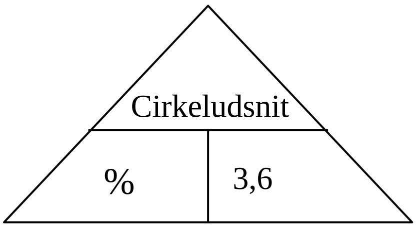
Centervinkel: Har sit toppunkt i centrum

Periferivinkel: har sit toppunkt på cirkel periferien.

Periferivinkel = ½ centervinkel.

Eksempel & Note:

2.3.5 Cirkeludsnit & Cirkeldiagrammer



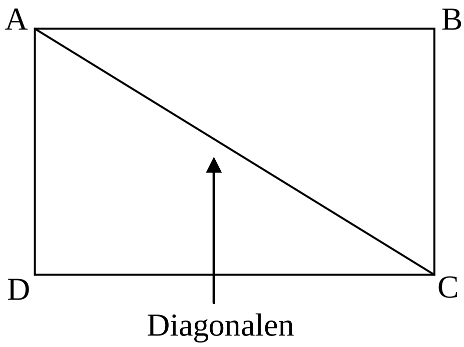
Cirkeludsnit = % * 3,6

Husk: altid at lægge cirkeludsnittene sammen hvis de ikke giver 360 grader er der noget galt.

Eksempel & Note:

2.4 Frikanter

2.4.1 Firkantens Vinkelsum



Vinkelsummen = 360º (∠A+ ∠B+ ∠C + ∠D)

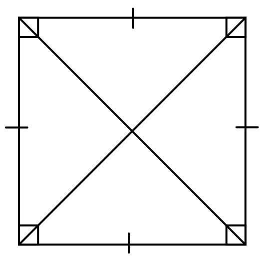
Diagonal: Går fra en vinkel kant til den modstående.

Eksempel & Note:

2.4.2 Firkantens Omkreds.

En firkants omkreds findes ved at lægge alle sidelængderne sammen i firkanten.

2.4.3 Kvadrat

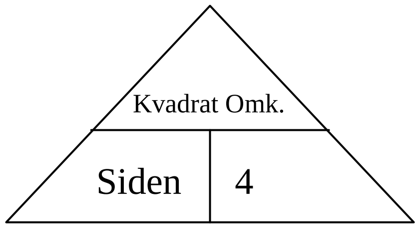


Et kvadrat er en firkant hvor alle sider er lige lange og alle vinkler er 90°.

Diagonalerne i kvadratet deler kvadratet i 4 lige store retvinklede trekanter.

Desuden er diagonalerne lige lange og står vinkelret på hinanden.

Kvadratets omkreds:



En firkants omkreds findes ved at lægge alle sidelængderne sammen i firkanten.

Kvadrat Omkreds = siden * 4

Kvadratets Areal:

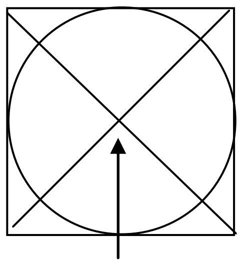
$$Areal\ Kvadrat = sidelængde^2$$

$$sidelængde = \sqrt{ArealKvadrat}$$

Kvadratets Indskrevne cirkel:

Centrum for den indskrevne cirkel findes der hvor kvadratets diagonaler skærer hinanden!

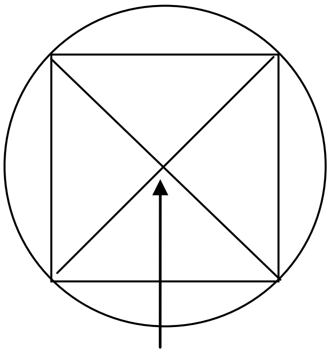
Eksempel & Note:



Kvadratets Omskrevne Cirkel:

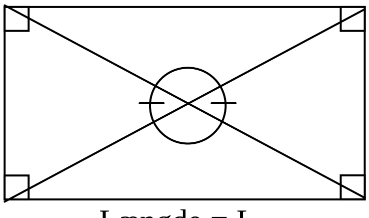
Centrum for den omskrevne cirkel findes der hvor kvadratets diagonaler skærer hinanden!

Eksempel & Note:



2.4.4 Rektangel

Et rektangel er en firkant hvor alle vinkler er retvinklede (ligesom kvadratet) dvs 90 °. Dog gælder det at siderne (længden & bredden) ikke er lige lange

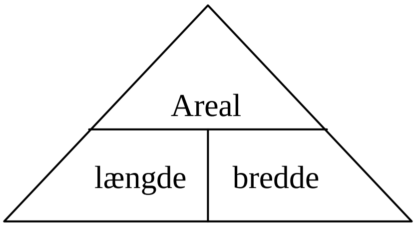


Rektanglets Omkreds:

$$Omkreds = 2 * (længde + Bredde)$$

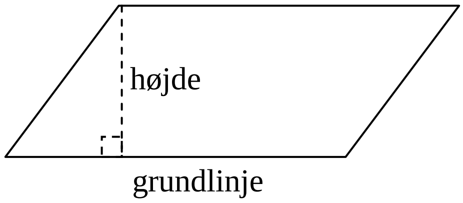
Rektanglets Areal:

*Areal Rektangel = Længde * Bredde*



Eksempel & Note:

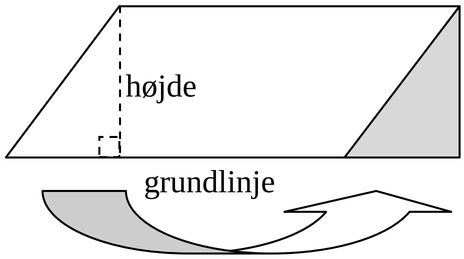
2.4.5 Parallelogram



Et parallelogram er en firkant hvor de modstående sider er parallelle.
Dette gør at de modstående sider nødvendigvis må være lige lange samt at modstående vinkler er lige store.

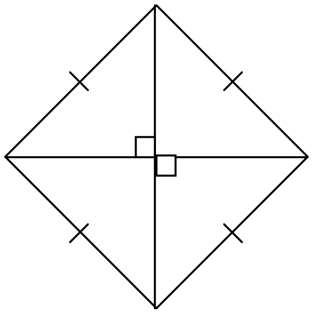
Parallelogram Areal:

*Areal = højde * grundlinje*



Eksempel & Note:

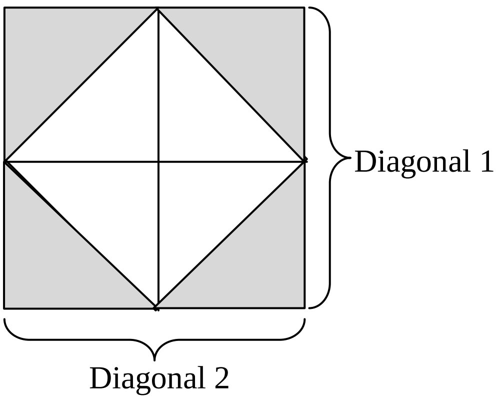
2.4.6 Rombe



En Rombe er et parallelogram hvor alle sider er lige lange.
Diagonalerne i romben står vinkelret på hinanden og de modstående vinkler er lige store. Man kan derfor sige at et kvadrat blot er en rombe men en rombe er ikke nødvendigvis et kvadrat!

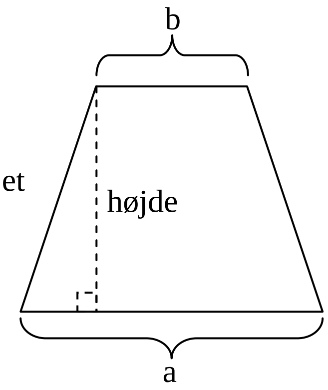
Rombe Areal:

$$Areal = \frac{diagonal1 * diagonal2}{2}$$



Eksempel & Note:

2.4.7 Trapez



Et trapez er en firkant hvor mindst 2 af siderne er parallelle.

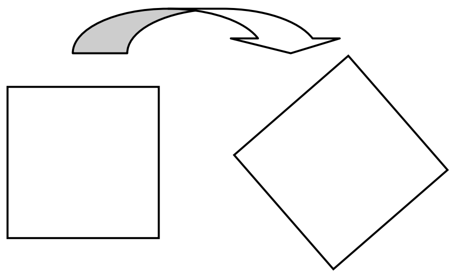
Dvs. et parallelogram er en trapez men en trapez er ikke nødvendigvis et parallelogram. De to parallelle sider kaldes henholdsvis a og b.

Trapez Areal:

$$Areal = \frac{(a+b)}{2} * h \quad \text{eller.} \quad Areal = ½ * (a + b) * h$$

Eksempel & Note:

2.4.8 Kongruente firkanter

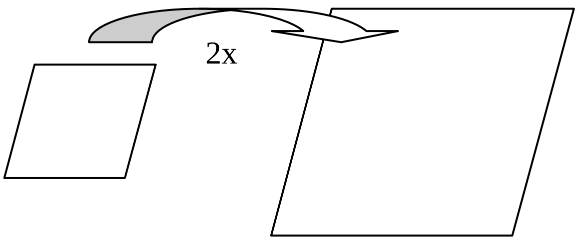


To firkanter er kongruente hvis de er ens.

Dvs. hvis dets sider og vinkler parvis er lige store samt at de har det samme areal. Trekanter kan også være kongruente

Eksempel & Note:

2.4.9 Ligedannede firkanter:

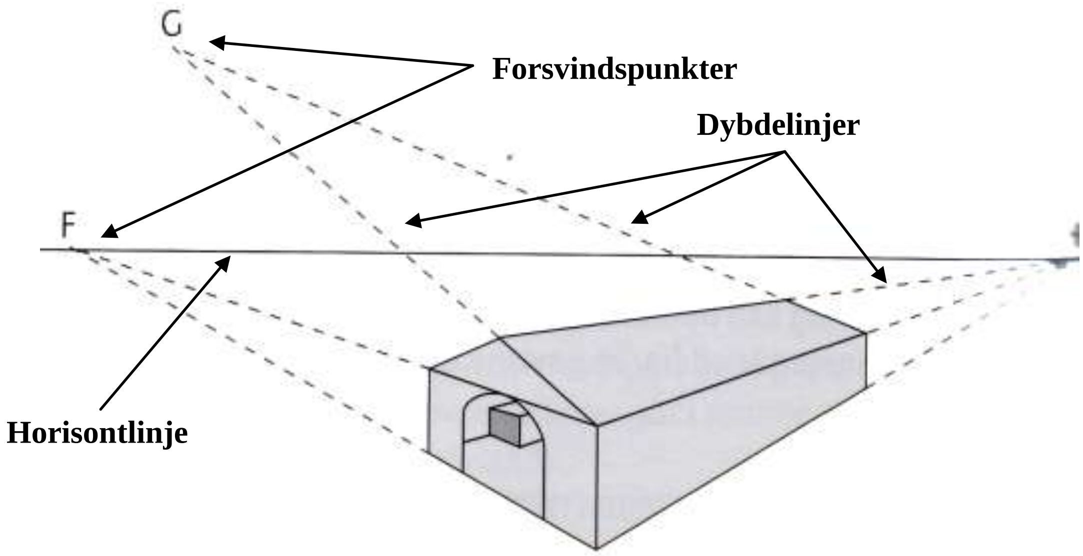


To firkanter er ligedannede hvis de har samme form, men ikke nødvendigvis er tegnet i samme målestoksforhold.

Eksempel & Note:

2.5 Perspektivtegning

Handler om at omsætte 3D verden til en 2D som kan tegnes på papir. Sagt på en anden måde gælder det om at kunne tegne noget på et papir som har en rummelig dimension.



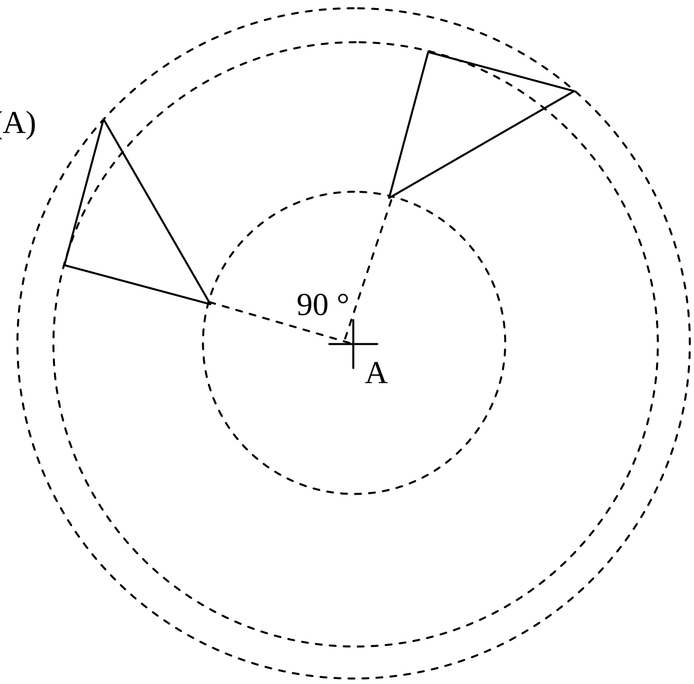
2 tegne regler:

- Parallelle linjer i virkeligheden går imod et fælles forsvindingspunkt
- Linjer som er lodrette eller vandrette i virkeligheden tegnes også lodrette og vandrette i billedet (dvs. de går ikke mod et fælles forsvindingspunkt)

Eksempel & Note:

2.6 Drejning af figur

For at dreje figuren omkring omdrejningspunktet (A) et bestemt antal grader drejes hvert af punkterne i figuren enkeltvis. Et punkt drejes ved at tegne en hjælpe streg fra punktet til omdrejningspunktet (A). Med vinkelmåleren lagt med vinkelspidsen i omdrejningspunktet og stregen som ben afsættes drejningsgraden. Herefter kan man med en passer finde det sted hvor det drejde punkt er placeret (se figuren)



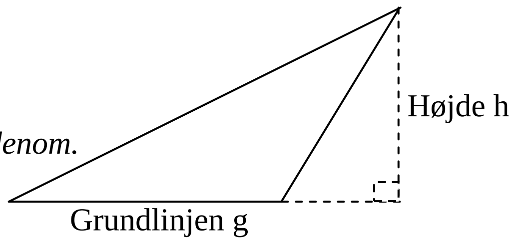
3.0 Plan & Rumgeometri (Areal & Rumfang)

3.1 Beregning af Arealer af Geometriske figurer:

a) **Trekanter:**

$$Areal = ½ * højde * grundlinje = \frac{højde * grundlinje}{2}$$

Huskelregel: Trekantens *areal er det halve af firkanten udenom.*

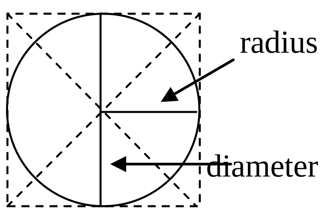


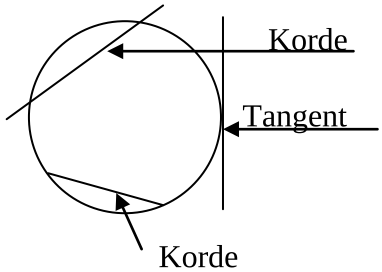
Husk: Højden står altid vinkelret på grundlinjen!

b) **Cirklen:**

$Areal = \pi * r^2$

$Omkreds = 2 * \pi * r = d * \pi$

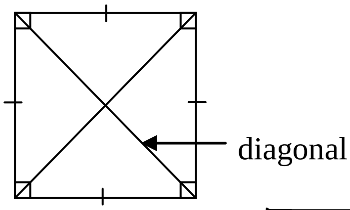




c) **Kvadrat:**

Alle sider er lige lange + 90° vinkler!

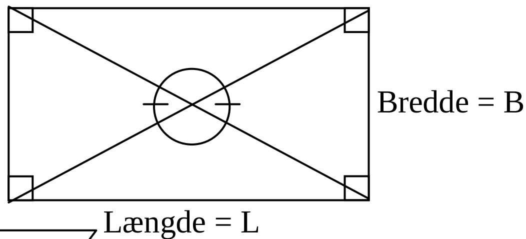
$Areal = sidelængde^2$



d) **Rektangel:**

Modstående sider parallelle + 90° vinkler!

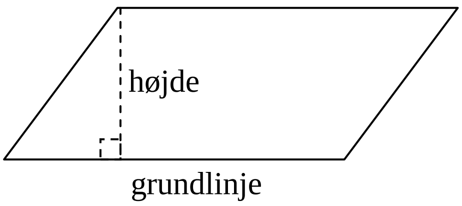
$Areal = Længde * Bredde$



e) **Parallelogram:**

Modstående sider parallelle!

$Areal = højde * grundlinje$

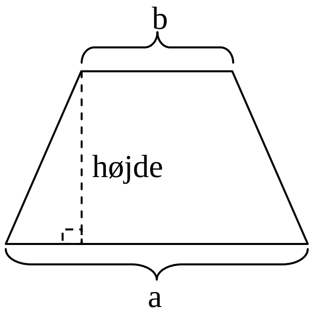


f) **Trapez:**

Kun et par sider er parallelle!

$Areal = \frac{(a+b)}{2} * h$ **el.**

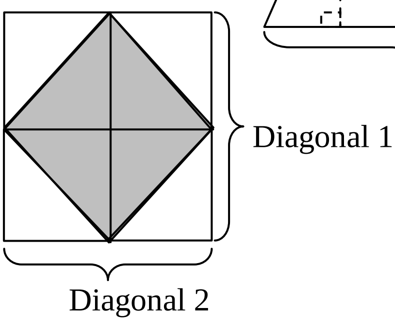
$Areal = ½ * (a + b) * h$



g) **Rombe:**

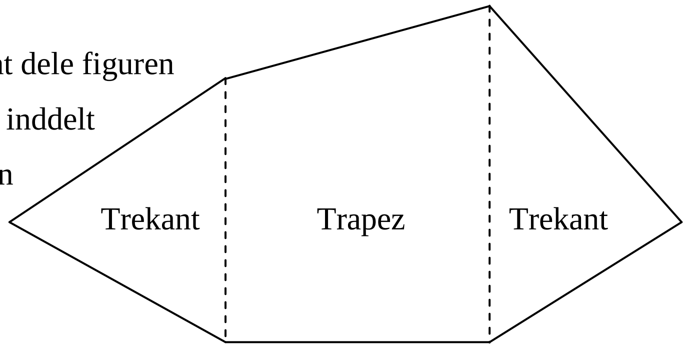
Parallelle sider + lige lange sider.

$Areal = ½ * diagonal1 * diagonal2$

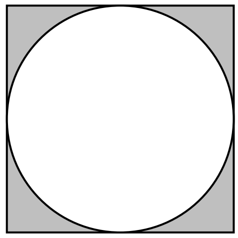


3.2 Areal af sammensatte figurer.

Arealet af en sammensat figur kan bestemmes ved at dele figuren ind i mindre figurer. I tilfældet her er figuren blevet inddelt i 2 trekanter og et trapez. Arealet af disse figurer kan nemt findes vha. arealformlerne og herved kan man finde det samlede areal for figuren.



3.3 Arealet imellem to figurer (udenoms areal):



Ligesom figurer kan lægges sammen kan de også lægges indeni hinanden. Når dette gøres opstår der et arealet som ligger imellem de to figurer – et udenoms areal. Arealet af dette område kan findes ved at trække arealerne for de to figurer fra hinanden:

Udenoms Areal = Areal Kvadrat – Areal Cirkel

Udenoms Areal = (3 * 3 cm) – (π * $1{,}5^2$) = 1,9 ≈ 2 cm^2

3.4 Omkredsen af figurer.

Når man skal finde omkredsen af en figur lægger man alle sidelængder sammen! På de fleste figurer er det muligt at måle længden af siderne men ikke af cirklen:

Omkreds af cirklen = $2 * \pi * r = d * \pi$ (**huskeregel:** omkredsen af 2 piger)

3.5 Overfaldearealet af Geometriske figurer:

Overfladearealet af rumlige figurer er ligesom omkredsen alt det der er rundt om (altså på overfladen) af figuren. Det kan være vanskeligt at opstille egentlige formler for overfladen af forskellige figurer da det kommer an på om de er lukkede eller åbne. F.eks. kan en cylinder være åben for oven og for neden - eller helt lukket.

Kugle Overfladeareal = $4 * \pi * r^2$

Kegle Overfladeareal uden bund = $\pi * r * \sqrt{r^2 + h^2}$

Kegle Overfladeareal med bund = $\pi * r * \sqrt{r^2 + h^2} + \pi * r^2$

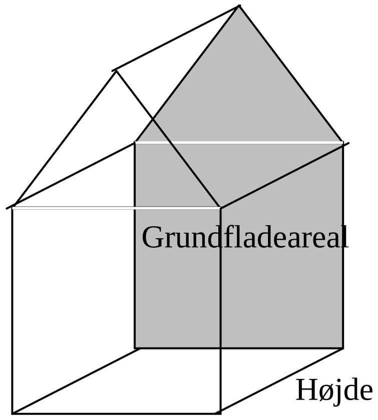
Cylinder Overfladezareal uden bund = $2 * \pi * r * (h + r)$

Cylinder Overfladeareal med bunde = $2 * \pi * r * (h + r) + 2 * (\pi * r^2)$

Kasse Overfladeareal med bunde = $2*(b * h + l * h + b * l)$

Kubbe/Terning Overfladeareal med bund = $6 * s^2$

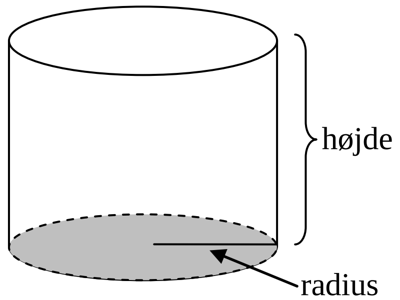
3.6 Rumfanget af objekter med ens snitflade (cylinder, kasse, prisme)



Hvis vi har et objekt hvor snitfladen er ens igennem hele objektet kan man finde rumfanget ved at multiplicere højden med grundfladearealet/snitfladearealet.

Rumfang Ens Snitflade = Grundfladeareal * højde.

Rumfanget af Cylinder:



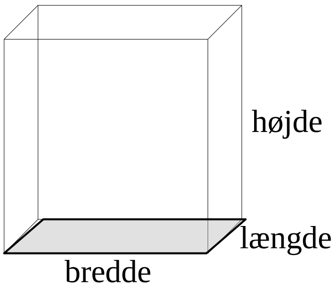
Rumfanget af en cylinder må være arealet af grundfladen som er arealet af cirklen ($\pi * r^2$) multipliceret med højden (h).

Rumfang Cylinder = $\pi * r^2 * h$

Rumfang af Kasse:

Grundfladen af en kasse må være længde gange bredde:

Rumfang Kasse = længde * bredde * højde.

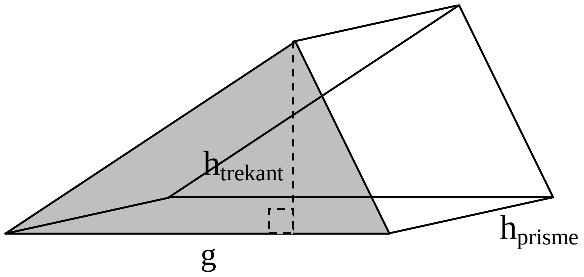


Rumfang af Kubbe/Terning:

I en kubbe/terning er alle sider (s) lige lange dvs. rumfanget må være:

Rumfang terning = side * side * side = s^3

Rumfang af prisme:



Grundfladen af et prisme er en trekant så rumfanget er:

Rumfang Prisme = ½ $h_{trekant} * g * h_{prisme}$

$$\text{Rumfang Prisme} = \frac{h_{trekant} * g * h_{prisme}}{2}$$

3.7 Rumfanget af objekter med forskellige snitflader (pyramide, kegle, kugle & Stubbe):

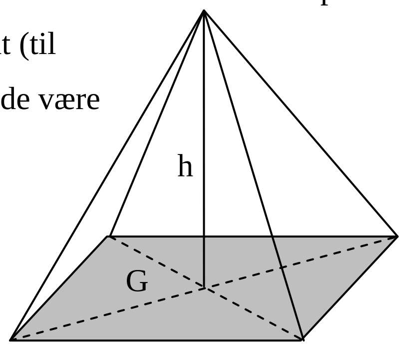
Når et objekt ikke har den samme snitfalde igennem hele objektet giver det ikke nødvendigvis mening hvordan rumfanget skal beregnes. Heldigvis er beregningen af rumfanget for en pyramide og en kegle ens:

$$\textit{Rumfang kegle/pyramide} = \frac{1}{3} * \textit{Grundfaldeareal} * \textit{højde}$$

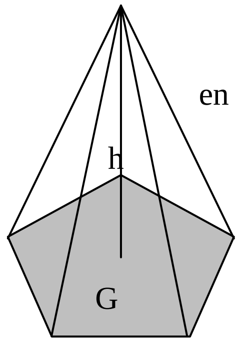
Rumfanget af en pyramide:

En pyramide består af en grundflade og et antal sider der mødes i et fælles punkt. Det man forbinder med en pyramide er hvor grundfladen er en firkant (til venstre) men teknisk set kan pyramidens grundflade være en hvilken som helst polygon (mangekant).

$$Rumfang\ Pyramide = \frac{1}{3} * G * h = \frac{G * h}{3}$$



Firkantet Pyramide

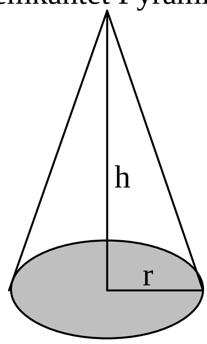


Femkantet Pyramide

Rumfanget af en Kegle:

En kegle har en snitflade som er rund og jo længere man kommer mod toppen jo mindre bliver disse runde snitflader! Grundfladearealet er selvfølgelig arealet af en cirkel så rumfanget for en kegle må være:

$$Rumfang\ Kegle = \frac{1}{3} * \pi * r^2 * h = \frac{\pi * r^2 * h}{3}$$

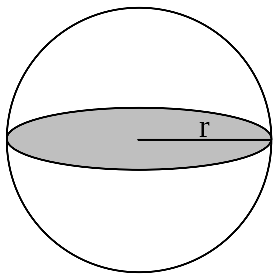


Kegle

Rumfang af en kugle:

Æren for opdagelsen af kuglens rumfang skal tilskrives Arkimedes (287 f.kr):

$$Rumfang\ Kugle = \frac{4}{3} * \pi * r^3 = \frac{4 * \pi * r^3}{3}$$

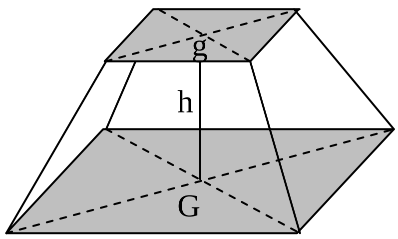


Rumfanget af pyramide stub og kegle stub:

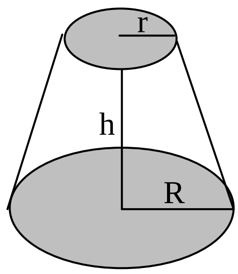
Hvis pyramiden eller keglen skæres af i toppen kalder man det for en stub. Stubbens rumfang kan ikke beregnes med den samme rumfangsformel:

$$Rumfang\ Pyramide\ Stub = \frac{1}{3} * h * (G + g + \sqrt{G * g}\,)$$ hvor G = areal bund, g = areal top

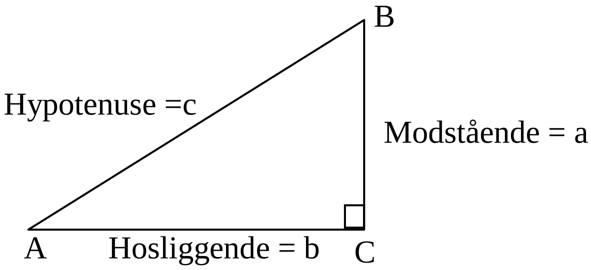
$$Rumfang\ Kegle\ Stub = \frac{1}{3} * \pi * h * (R^2 + r^2 + R * r)$$ hvor R = radius bund, r = radius top



Pyramide Stub



Kegle Stub



4. Trigonometri (geometri)

Læren om trekants beregninger

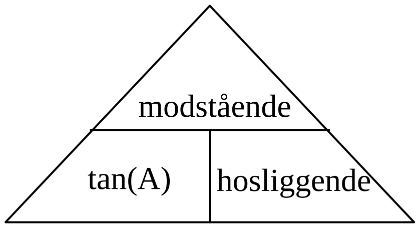
4.1 Tagens, Cosinus, Sinus (retvinklet trekanter)

Har du vinklen og siden i en retvinklet trekant kan du beregne de 2 andre sider vha. tangens, cosinus eller sinus.

4.1.1 Tangens

$$\text{Tangens}(\angle A) = \frac{Modståendekatete}{Hosliggendekatete} = \frac{a}{b}$$

$$\angle A = \tan^{-1}\left(\frac{\text{mod}\,ståendekatete}{hosliggendekatete}\right)$$

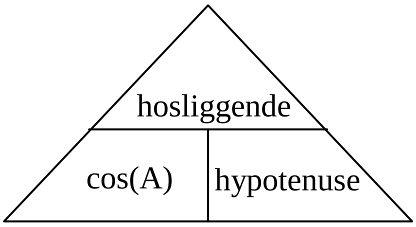


Eksempel & Note:

4.1.2 Cosinus

$$\text{Cosinus}(\angle A) = \frac{hosliggendekatete}{hypotenusen} = \frac{b}{c}$$

$$\angle A = \cos^{-1}\left(\frac{hosliggende}{hypotenusen}\right)$$

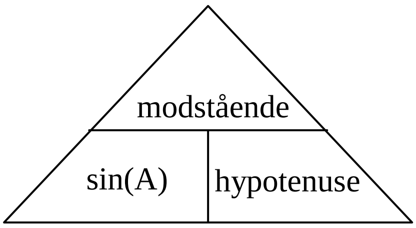


Eksempel & Note:

4.1.3 Sinus

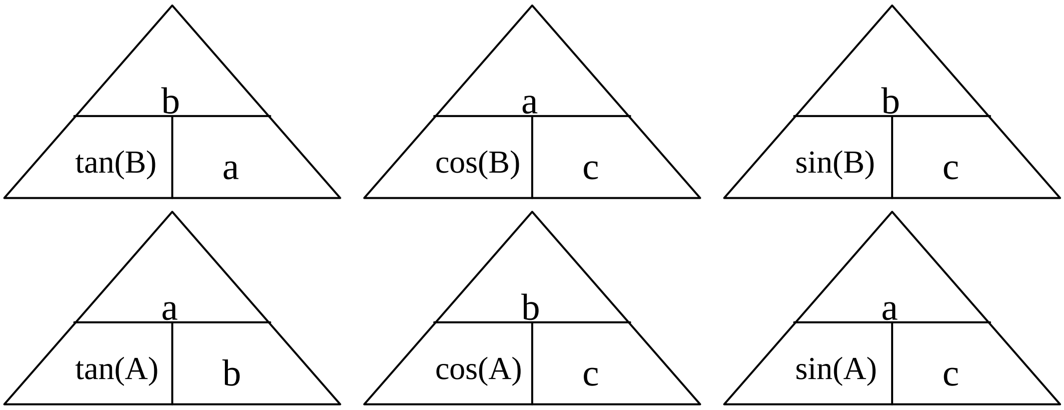
$$\text{Sinus}(\angle A) = \frac{\text{mod}\,ståendekatete}{hypotenuse} = \frac{a}{c}$$

$$\angle A = \sin^{-1}\left(\frac{\text{mod}\,stående}{hypotenusen}\right)$$



Eksempel & Note:

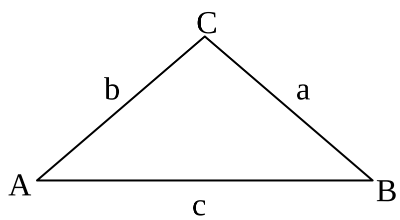
4.1.4 samlede regnetrekanter (med a, b og c)



Eksempel & Note:

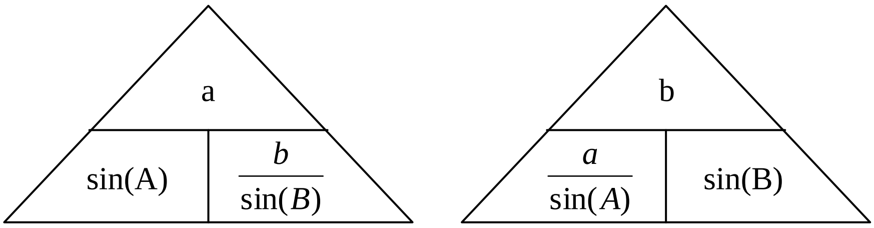
4.2 Sinus relationen (vilkårlige trekanter)

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)} \text{(sinusrelationen)}$$



4.2.1 Trekant med a og b.

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)}$$

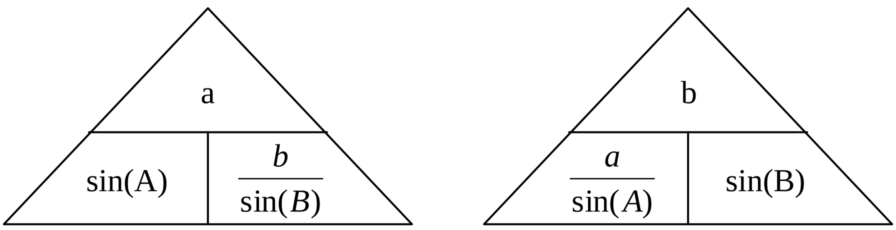


$$\angle \text{ A} = \sin^{-1}\left(\frac{a * \sin(B)}{b}\right) \qquad \text{og} \qquad \angle \text{ B} = \sin^{-1}\left(\frac{b * \sin(A)}{a}\right)$$

Eksempel & Note:

4.2.2 Trekant med a og c.

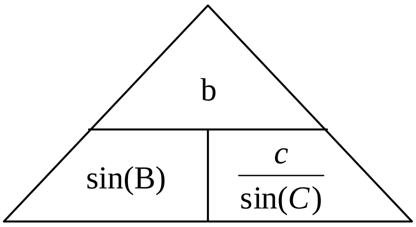
$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{c}{\sin(C)}$$

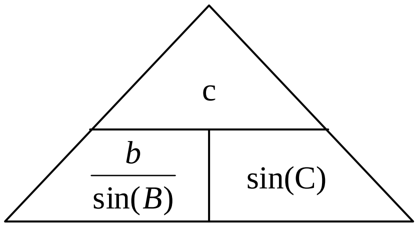


$$\angle \text{ A} = \sin^{-1}\left(\frac{a * \sin(C)}{c}\right) \qquad \text{og} \qquad \angle \text{ C} = \sin^{-1}\left(\frac{c * \sin(A)}{a}\right)$$

4.2.3 Trekant med c og b.

$$\frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$$





$\angle$ B = $\sin^{-1}\left(\frac{b * \sin(C)}{c}\right)$ og $\angle$ C = $\sin^{-1}\left(\frac{c * \sin(B)}{b}\right)$

Eksempel & Note:

4.3. Cosinus Relationen

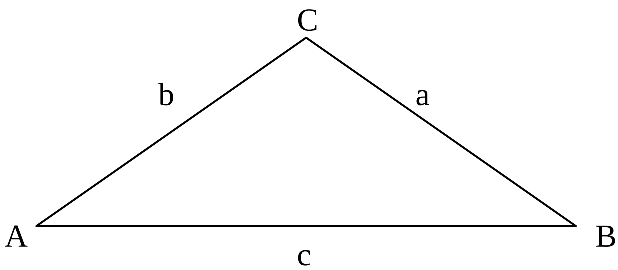
Gælder ligesom sinus relationen for en vilkårlig trekant:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 * b * c * \cos(A)$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2 * a * c * \cos(B)$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2 * a * b * \cos(C)$

4.4 Herons formel (areal ud fra sidelængder)



Herons formel kan bruges til at beregne arealet af en vilkårlig trekant ud fra længderne af de 3 sider i trekanten.

Først beregnes en hjælpekonstant kaldt s.

$s = \frac{a+b+c}{2}$

Herefter kan arealet beregne:

Areal = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

Eksempel & Note:

5.0 Algebra

4.1 Reduktion

Reduktion betyder at gøre noget mindre og mere simpelt.

5.1.1 Regneregler for division og gange

Når man ganger to tal med hinanden afhænger resultatet af om tallene er positive eller negative.

Følgende huskeregel gælder:

- Når det går godt (+) for en god ven (+) er det godt (+).
- Når det går dårligt (-) for en dårlig ven (-) er det godt (+)
- Når det går dårligt (-) for en god ven (+) er det dårligt (-).
- Når det går godt (+) for en dårlig ven (-) er det dårligt (-)

Regneregler:

+ * + = +	+ : + = +
– * – = +	– : – = +
– * + = –	– : + = –
+ * – = –	+ : – = –

Eksempel & Note:

5.1.2 Grundlæggende reduktion

- **Usynligt 1 tal:** a = 1a
- **Usynligt gange:** 2a = 2 * a
- **Addition:** a + 2a + 3a = 6a
- **Bogstaver for sig og tal for sig:** 2a + 4 + a + 2 = 3a + 6
- **Tal gange bogstav:** 3 * a = 3a
- **Bogstav gange bogstav:** a * a = a^2

Eksempel & Note:

5.1.3 Parentesregning

Plus: Fjern parenteserne (hvis intet tegn står foran parentesen er det en plus parentes)

(2a + 4) = 2a + 4

Minus: Fortegn ændres

-(2a + 4) = -2a – 4

-(-2a + 4) = 2a – 4

Tal foran parentes: Gang ind.

3(2a + 4) = 3*2a + 3*4 = 6a + 12

-3(2a + 4) = -3*2a + -3*4 = -6a – 12

Eksempel & Note:

5.1.4 Kvadrate på en toleddet størrelse. Huskeregel:

Kvadratet på første led plus kvadratet på andet led plus/minus det dobbelte produkt.

$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + b^2 + 2ab$

$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 + b^2 - 2ab$

5.1.5 To tals sum gange de samme to tals differens

To tals sum gange de samme to tals differens er kvadratet på første led minus kvadratet på andet led.

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Eksempel & Note

5.2 Ligninger

5.2.1 Regneregler for ligninger

1) Man må lægge x'er sammen med x'er og tal sammen med tal – man må ikke blande dem!
   Eks: 2x - 1x + 4x = 5x
2) Usynlige ting:
   - Usynligt 1 tal: x = 1x.
   - Usynligt gange tegn: 2x = 2 * x
   - Usynligt Plus: x = +x.
3) Man må flytte et tal eller et x til den modsatte side af = tegnet blot man ændre fortegnet til det modsatte (det koster at flytte noget her i livet – også i ligningsverden)
4) Man samler x'erne på den ene side (isoler x) og tallene på den anden
   NB: som regel samler/isolerer man x'erne på venstre side – men højre kan også bruges.
5) Man må flytte et tal foran x over på den anden side blot det bliver divideret op i tallet på den anden side. Dvs. at et gangetegn bliver til et divisionstegn når det flyttes.

5.2.2 Simple ligninger

Brug af regel nr 3 og nr 4.

Eks:			
	x + 3 = 4 <=>	2x = x + 2 <=>	x – 6 = 3 <=>
	x = 4 – 3 <=>	2x – x = 2 <=>	x = 3 + 6 <=>
	$\underline{\underline{x = 1}}$	$\underline{\underline{x = 2}}$	$\underline{\underline{x = 9}}$

Eksempel & Note:

5.2.3 Isolering af x

Brug af regel nr 5 som forudsætter at man har isolreret x (altså brug af regel 3 og 4)

$2\,x = 6$ (der står et usynligt gange imellem 2 og x. som bliver til division)

$x = \frac{6}{2}$

$x = 3$

Eksempel & Note:

5.2.4 Tekstligninger

Problemstillinger kan oftest oversættes til ligninger hvor løsningen af dem er enkel:

Lise og Viola er tilsammen 40 år men Viola er 4 år ældre end Lise. Hvor gammel er Lise?

Teksten oversættes til en ligning. Det man skal finde sættes til x.

Lise = x (vi skal finde Lises alder)

Viola = x + 4

Lise + Viola = 40

Hvis vi erstatter Lise og Viola med de lignings udtryk vi har fået ovenfor fås:

$x + x + 4 = 40$

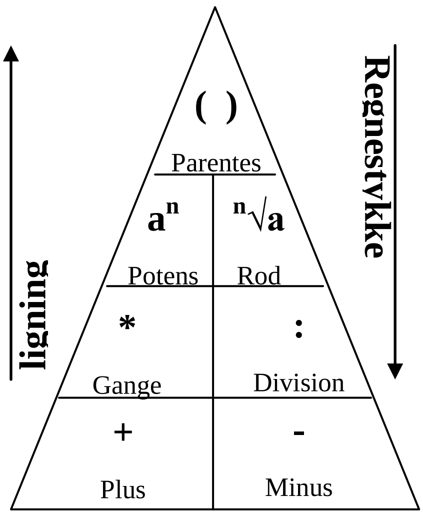
Og det er noget som nemt kan løses.

$2x + 4 = 40$

$2x = 40 - 4$

$2x = 36$

$x = \frac{36}{2} = 18$ år



5.2.5 To ligninger med to ubekendte.

Ligning 1: $3x + y = 30$

Ligning 2: $2x + 2y = 16$

Man isolerer den ene af de ubekendte i en af ligningerne. Lad os isolere y i ligning nr 2;

$2x + 2y = 16$

$2y = 16 - 2x$

$y = \frac{16}{2} - \frac{2x}{2}$

$y = 8 - x$

Nu ved vi jo hvad **y** er defineret som nemlig **8 – x.** Så nu kan vi erstatte y i ligning nr 1 med 8 – x.

$$\left.\begin{array}{l} 3x + y = 30 \\ y = 8 - x \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3x + (8 - x) = 30 \\ 3x + 8 - x = 30 \\ 2x = 30 - 8 \\ 2x = 22 \\ x = 22/2 \\ \underline{\underline{x = 11}} \end{array}$$

Nu har vi x og kan så også finde y ved at sætte x ind i ligningen hvor vi isolerede y.

$$y = 8 - x$$
$$\underline{\underline{y = 8 - 11 = -3}}$$

Eksempler & Noter:

5.3 Uligheder

En ulighed har et større end > eller mindre end < tegn i stedet for et ligmed =. Når en ulighed løses bliver resultatet derfor ikke en værdi men en større mængde af tal.

5.3.1 Løsning af ulighed

Der gælder de samme regler for ligninger som for uligheder. Den eneste forskel er at når man dividere eller ganger med et negativt tal vendes fortegnet.

Eksempel 1:

$2x + 3 > x + 4$

$2x - x > 4 - 3$

$x > 1$

Eksempel 2: (hvor tegn vendes)

$2x - 3 > 4x - 1$

$2x - 4x > -1 + 3$

$-2x > 2$

$x < 2/-2$ (her vendes fortegn)

$x < -1$

5.3.2 Uligheder og intervaller

Resultatet af en ulighed kan gives som et Interval med kantede parenteser

[2 ; 4] = lukket interval fra 2 til 4 hvor alle tal fra 2 til 4 er løsning.

]2; 4] = Halv åbent interval hvor alle tal højere end 2 og til og med 4 er løsning. (2 er ikke med)

[2; 4 [= Halv åbent interval hvor alle tal fra og med 2 til 4 (men ikke 4) er løsning.

]2; 4 [= Åbent interval hvor alle tal der ligger imellem 2 og 4 er løsning.

Eksempel 1:

] 1; ∞ [fra 1 til uendelig

Eksempel 2:

] ∞; -1[fra uendelig og til -1 (men ikke -1)

6. 0 Statistik

Statistik handler om hvordan man bearbejder og analyserer og præsenterer data i form af tal.

6.1 Observationer: *De tal som indsamles og udgør det statistiske datamateriale kaldes observationer*. Observationerne behøver ikke alle at være forskellige! Nedenfor ses observationer med alder i en 1g klasse:

Adam	15	**Emilie**	17	**Juliane**	18	**Mikkel**	16	**Nikolaj**	16
Amanda	16	**Frederik**	16	**Lars**	15	**Mischa**	16	**Patricia**	15
Artemis	17	**Hans**	18	**Mads**	16	**Monika**	16	**Peter**	16
Christian	16	**Helen**	16	**Marie**	17	**Natascha**	15	**Tobias**	17
Dan	17	**Jonathan**	17	**Mathias**	15	**Niki**	17	**Tora**	19

6.2 Statistiske Deskriptorer:

6.2.1 Gennemsnit / Middelværdien: *alle observationer lagt sammen og dividerer med antallet af observationer*!

$$Gennemsnit = \frac{Alle\_observationer\_lagt\_sammen}{antal\_observationer}$$

$$\frac{15+16+17+16+17+17+16+18+16+17+18+15+16+17+15+16+16+16+15+17+16+15+16+17+19}{25} = 16{,}39$$

6.2.2 Typetallet: er den observation der forekommer flest gange - dvs. det typiske tal!

15 **16** 17 **16** 17 17 **16** 18 **16** 17 18 15 **16** 17 15 **16** **16** **16** 15 17 **16** 15 **16** 17 19

Derfor er typetallet i eksemplet 16 år

6.2.3 Mindste- og Størsteværdien: *Mindsteværdien er den mindste observation mens størsteværdien er den største værdi*! I vores eksempel med klassens alder ovenfor må mindsteværdien være 15 og størsteværdien 19.

HUSK: mindste- & størsteværdien er ikke den observation der forekommer færrest/flest gange!

6.2.4 Variationsbredden: *Variationsbredden er forskellen imellem største- og mindsteværdien*

Variationsbredden = Størsteværdi - Mindsteværdi

I vores eksempel med klassens alder bliver variationsbredden da (19-15) = 4!

6.2.5 Median: **N**år man skal finde medianen skal man først stille alle observationerne på række efter størrelse fra mindst til størst! *Den observation der står i midten kaldes for medianen*! Medianen er altså det tal som har 50 % af tallene/observationerne under sig!

Medianen (i ulige talsæt): I et ulige talsæt står et tal naturligt i midten! Medianen kan findes ved:

Median talnr = (Antal Observationer / 2) og rund tallet op eks. 25/2 = 12,5 ≈ 13 tal (tal nr 13)

15 15 15 15 15 16 16 16 16 16 16 16 **16** 16 16 17 17 17 17 17 17 17 18 18 19

Medianen (i lige talsæt): I lige observationssæt står 2 observationer i midten. Her er medianen gennemsnittet imellem de midterste tal!

Median tal Venstre = Antal Observationer/2 Median tal Højre = Antal Observationer/2 + 1

Eks: Venstre = 24/2 =12 Højre = 24/2+1=13

155 158 165 165 168 170 170 170 175 175 175 **175** **178** 180 180 182 185 185 185 186 188 190 190 195

Her er medianen (175+178)/2= 176,5! *Til færdighedsprøven vælges den der står til venstre*!

6.2.6 Kvartiler:

Nedre Kvartil: den observation der står midt imellem mindsteværdien og medianen! Dvs. det tal der har 25 % af observationerne under sig! Ulige = 1/4*Antal & rund op, Lige (Gnm 1/4*Antal+1).

15 *15 15 15 15 16* **16** *16 16 16 16 16* 16 16 16 17 17 17 17 17 17 17 18 18 19

155 158 165 165 168 **170** **170** 170 175 175 175 175 178 180 180 182 185 185 185 186 188 190 190 195

Øvre Kvartil: den observation der står midt imellem medianen og størsteværdien! Dvs. det tal der har 75 % af observationerne under sig! Ulige (3/4*Antal & rund op), Lige (Gnm 3/4*Antal+1)

15 *15 15 15 15 16* 16 *16 16 16 16 16* 16 16 16 17 17 17 **17** 17 17 17 18 18 19

155 158 165 165 168 170 170 170 175 175 175 175 178 180 180 182 185 **185** **185** 186 188 190 190 195

6.2.7 Hyppighed: er hvor mange gange hver observation forekommer i observationssættet. Den betegnes ofte med h(x). En hyppigheds tabel over eksemplet ses til højre!

Alder	Hyppighed h(x)
15	5
16	10
17	7
18	2
19	1

6.2.8 Summeret Hyppighed: *er hyppighederne lagt sammen med de foregående hyppigheder* (summen er resultatet af et addition/plus stykke). Den summerede hyppighed betegnes H(x). Bemærk det store bogstav!!

6.2.8 Frekvens: for en observation angiver, hvor stor en del af alle observationerne en bestemt observation udgør. Frekvensen kan beregnes ved at tage hyppigheden og dividere med det samlede antal af observationer:

$$Frekvens = \frac{hyppighed\_for\_observation}{samlede\_antal\_observationer}$$

Frekvensen betegnes f(x) og kan enten opgives som en brøk, decimaltal eller en procentdel.

Lad os se på frekvensen i vores eksempel med klassens alder:

Alder	Hyppighed h(x)	Frekvens f(x)	f(x) i %
15	5	5/25 = 0,2	20
16	10	10/25 = 0,4	40
17	7	7/25 = 0,28	28
18	2	2/25 = 0,08	8
19	1	1/25 = 0,04	4

Den summerede frekvens: *er frekvensen lagt sammen med de foregående frekvenser*. Den summerede frekvens betegnes F(x). Lad os se på eksemplet da det forklare det meget bedre:

Alder	Hyppighed h(x)	Summeret Hyppighed H(x)	Frekvens f(x)	Summeret Frekvens F(x)
15	5	5	0,2	0,2
16	10	(5+10) = 15	0,4	(0,2+0,4) = 0,6
17	7	(15+7) = 22	0,28	(0,6+0,28) = 0,88
18	2	(22+2) = 24	0,08	(0,88+0,08) = 0,96
19	1	(24+1) = 25	0,04	(0,96+0,04) = 1

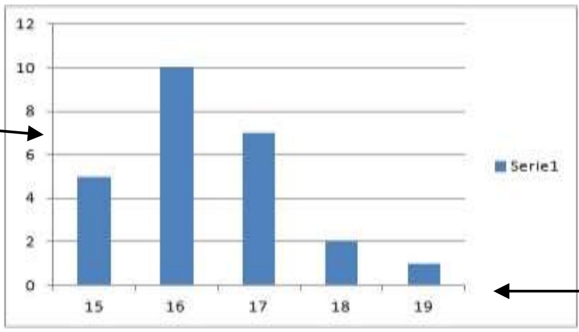
6.3 Diagrammer:

I statistik benyttes ofte diagrammer af forskellige slags til at vise fordelingen af observationerne! I det følgende skal vi se på de 4 mest almindelige former: *pinde, cirkel & grafer/kurver & boksplot*!

6.3.1 Pindediagram, stolpediagram og histogrammer:

Basalt set er det blot et koordinatsystem med en x og en y akse hvor observationerne er lagt ind i x aksen og hyppigheden ud af y aksen. Lad os se hvordan vores eksempel kommer til at se ud:

y-akse = hyppighed

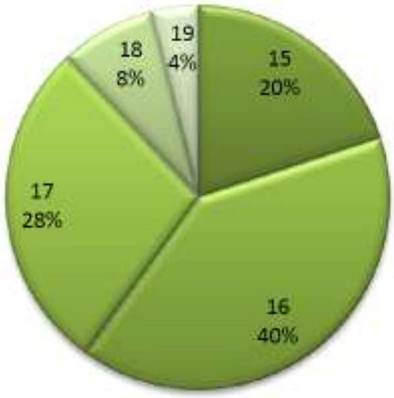


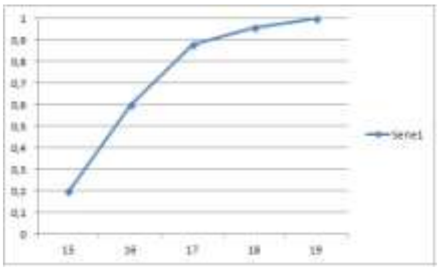
x-akse = observationer

6.3.2 Cirkeldiagram:

I et cirkeldiagram udgør hver observation et vist antal grader i cirklen. På denne måde kan man hurtigt få et visuelt overblik over hvilken observation der er flest af og hvilke der er færrest af. Antallet af grader kan bestemmes ud fra frekvensen!

$$Cirkeludsnit = frekvens * 360°$$





6.3.3 Graf

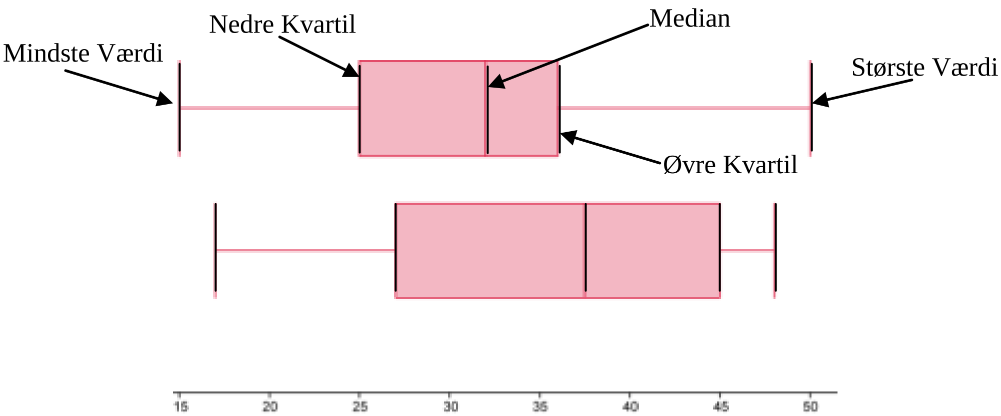
I grafen/kurven afsætter man tallene som punkter i et koordinatsystem, hvorefter de forbindes med rette linjer.

6.3.4 Boksplot:

Boksplot er en grafisk fremstilling der gør det nemt at sammenligne to talmængder mht. forskelle og ligheder!

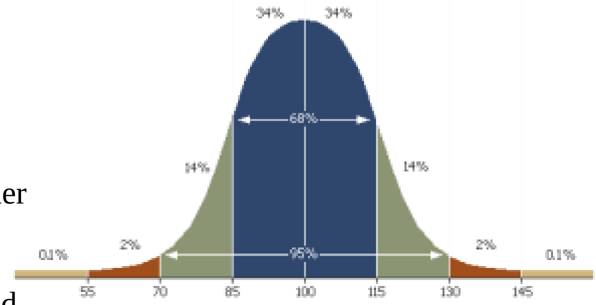
- Tegn en tallinje med passende interval der matcher tallene.
- Sæt en lodret streg udfor mindst, nedre kvartil, medianen, øvre kvartil og største på tallinjen!
- Tegn en streg igennem
- Forbind Nedre og Øvre kvartil med en streg så de danner en kasse!

Nedenfor er tegnet 2 boksplot over 2 klassers færdighedsregningsprøver med 50 point!



6.4 At vurdere statistik & diagrammer:

Det er vigtigt at kunne vurdere hvad diagrammerne fortæller om statistikken! I denne forbindelse er følgende ord vigtige:



Normalfordeling

- Normaltfordelt: Når flertallet af observationer er samlet omkring midten og danner en klokkeform. Det gør sig f.eks. gældende med IQ flest har 100.
- Jævnt fordelt: Når observationerne er fordelt ligeligt dvs. hyppigheden er den samme!
- Spredning Stor/Lille: Når observationerne er delt i to dele - en i den høje og en i den lave ende - men ingen på midten! I sådan en situation siger median og gennemsnit intet da det så er få observationer der har den pågældende værdi!

7.0 Kombinatorik & Sandsynlighedsregning:

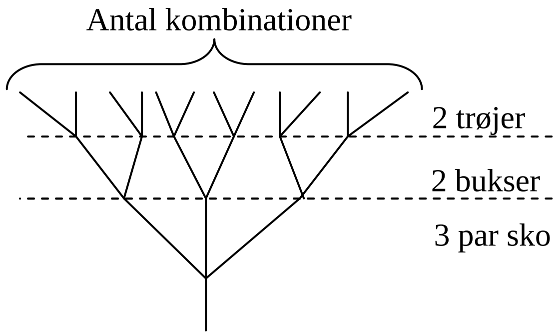
7.1 Kombinatorik

Kombinatorik er en metode til at beregne hvor mange måder noget kan kombineres på.

7.1.1 Tælletræ

I et tælletræl tilføjes der en nyt sæt grene for hver kombinations mulighed. Når alle muligheder er lavet til grene kan antallet af kombinationer tælles ved at tælle ende grene.

Eks: En pige har 3 par sko, 2 par bukser og 2 trøjer. På hvor mange måder kan man kombinere tøjet:
12 kombinationer.



Eksempler & Noter:

7.1.2 Multiplikationsprincippet

Tælletræet bliver hurtigt meget stort og derfor svært at anvende. I stedet kan man bruge multiplikationsprincippet til at beregne antallet af kombinationer. I multiplikationsprincippet ganger/multipliceres alle muligheder med hinanden.

Eks: En pige har 3 par sko, 2 par bukser og 2 trøjer. På hvor mange måder kan man kombinere tøjet

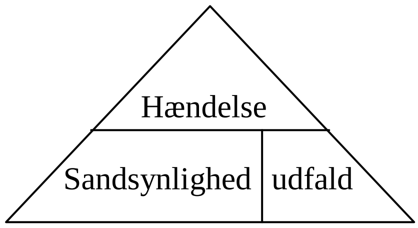
Kombinationer = 3 * 2 * 2 = 12 kombinationer

Eksempler & Noter:

7.2 Sandsynlighed:

Sandsynlighedsregning er oprindeligt opstået i forbindelse med kortspil hvor man ønskede at beregne chancen/sandsynligheden for at man ville vinde et spil.
Sandsynligheden kan beregnes vha. følgende formel:

$$\text{Sandsynlighed} = \frac{Antal\_gunstige\_hændelser}{Antal\_mulige\_udfald} * 100$$



Eks: Hvad er sandsynligheden for at trække en konge af et spil på 54 kort

$$\text{Sandsynlighed} = \frac{antal\_konger}{antal\_kort} = \frac{4}{54} = \frac{1}{13} *100\% = 7{,}7\ \%$$

Eksempler & Noter:

7.2.1 Kombinatorik i Sandsynlighedsregning.

Kombinatorik benyttes ofte til at beregne antal udfald og antal hændelser.

Eks: Hvad er sandsynligheden for at slå to 6'ere?

Kombinationer for 2 terninger = 6 * 6 = 36

$$\text{Sandsynlighed} = \frac{1}{36} * 100\ \% = 2{,}8\ \%$$

Eksempler & Noter:

7.2.2 Stikprøve uden tilbagelægning.

En stikprøve er når man tager en tilfældig ting ud af en mængde f.eks. en lotto kugle ud af bowlen, et kort fra kortspillet osv. I de tilfælde hvor man ikke lægger stikprøven tilbage i bunken igen kalder man det for en stikprøve uden tilbagelægning.

Når man skal beregne sandsynligheden i en stikprøve uden tilbagelægning beregner man sandsynlighederne for hver udtrækning og multiplicere/ganger dem med hinanden.

Eks. Hvad er sandsynligheden for at trække en konge to gange i træk.?

Vi trækker to gange – sandsynligheden for de 2 gange er:

$$\text{Sandsynlighed 1 træk} = \frac{4}{54}$$ (der er jo 4 konger og 54 kort)

$$\text{Sandsynlighed 2 træk} = \frac{3}{53}$$ (nu er der 3 konger og 53 kort tilbage da vi ikke lagde det tilbage)

$$\text{Sandsynlighed} = \frac{4}{54} * \frac{3}{53} = \frac{12}{2862} * 100\ \% = 0{,}4\ \%$$

Eksempler & Noter:

7.2.4 Stikprøve med tilbagelægning

Dette er det modsatte af stikprøve uden tilbagelægning. Forskellen er at stikprøven lægges tilbage i bunken igen efter hver trækning.

Eks: Hvad er sandsynligheden for at først at trække en konge – lægge den tilbage i bunken – og så igen trække en konge?

$$\text{Sandsynlighed} = \frac{4}{54} * \frac{4}{54} = \frac{16}{2916} * 100\ \% = 0{,}5\ \%$$

Eksempler & Noter:

8.0 Analytiske Geometri (funktioner)

En funktion er kortfortalt en ligning som omdanner en talværdi til en anden. Dvs. man kan sige at en funktion er en slags tal-maskine der laver tal om til nye. En funktion symboliseres med:

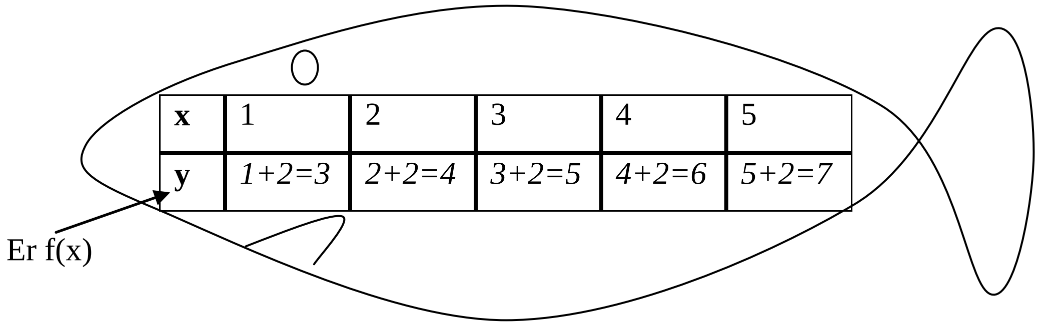
$f(x)$ som udtales f af x.

$f(x) = x + 2$ eller $y = x + 2$

8.1 At tegne en funktion i et koordinatsystem (Sildeben)

Funktioner kan tegnes i et koordinatsystem og danner forskellige typer af linjer. Et sildeben kan bruges til at tegne alle funktioner med. Sildebenet hjælper en med at beregne et antal punkter i koordinatsystemet som funktionen går igennem!

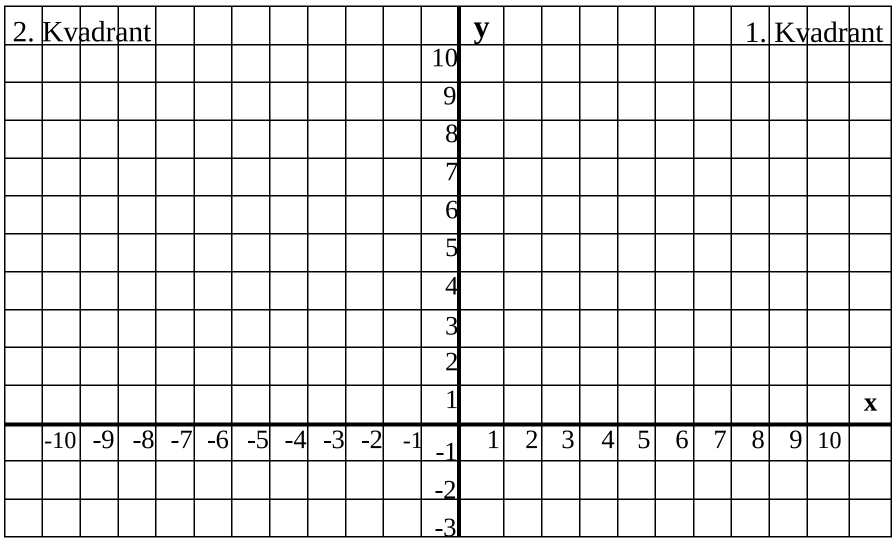
Først sættes et antal x værdier ind f.eks. 1 2 3 4 5. Herefter indsætter man værdierne en efter en i funktionen i dette tilfælde $f(x) = x + 2$ (se nedenfor)



x	1	2	3	4	5
y	*1+2=3*	*2+2=4*	*3+2=5*	*4+2=6*	*5+2=7*

Linjen går derfor igennem (1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6) og (5, 7) som man kan afsætte og tegne.

Eksempel & Note: (tegn den)



8.2 Den lineære funktion

En lineær funktion giver *en ret linje* når den tegnes. Alle lineære funktioner følger følgende forskrift (linjens ligning):

$f(x) = ax + b$

hvor a = hældning (1 ud af x akslen og hældning op)

b = linjens skæring med y akslen.

Eks: $f(x) = -2x + 3$ er $a = -2$ og $b = 3$

At tegne linjen direkte ind:

- Find b i ligningen
- Find punktet på y akslen og sæt en prik.
- Find a i ligningen.
- Ryk 1 ud af x akslen og hældningen op eller ned. Tegn en prik.
- Forsæt videre fra prikken - en ud og hældning op.

Eksempel & Note:

8.2.1 Beregning af linjens hældning (a).

Hvis man har to punkter som man ved ligger på en ret linje kan man beregne linjens hældning. Hvis punkterne hedder $A(x_1, y_1)$ og $B(x_2, y_2)$ kan hældningen beregnes ved følgende formel:

$$a = \text{hældningen} = \frac{y2 - y1}{x2 - x1}$$

Eks: En linje går igennem A(1,4) og B(3,8)

$$a = \frac{8-4}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$$

8.2.2 Beregning af linjens skæring med y aksen (b).

Hvis man kender hældningen og et punkt på linjen kan man beregne skæringen med y aksen ved:

$b = f(x) - ax$

Eks: $a = 2$ og B(3, 8)

$b = 8 - 2 * 3 = 2$

Eksempel & Note:

8.2.3 Beregning af to linjers skæringspunkter.

Skæringspunktet findes ved at sætte funktionerne lig hinanden og løse ligningen

eks: f(x) = 2x – 2 og g(x) = x + 3

f(x) = g(x)

2x – 2 = x + 3

2x – x = 3 + 2

x = 5

x koordinaten til skæringspunktet er 5. Herefter sættes 5 ind i en af funktionerne

f(5) = 2 * 5 – 2 = 8

De skærer derfor hinanden i (5, 8)

Eksempel & Note:

8.3 Ligefrem proportionalitet & Omvendt proportionalitet

8.3.1 Ligefrem proportionalitet

Der er tale om proportionalitet når *en fordobling af x giver en fordobling af f(x) også kendt som y*.

Ligefrem proportionalitet følger følgende funktion:

f(x) = ax (a = en konstant dvs. et tal som ikke ændres)

Når den tegnes danner den en ret linje igennem Origo.

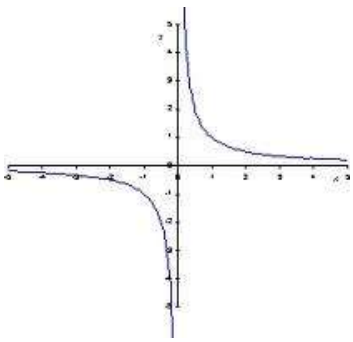
Eksempel & Note: (forhold der er proportionale?)

8.3.2 Omvendt proportionalitet

Hvis *en fordobling af x giver en halvering af f(x)* siges det at x og f(x) er omvendt proportionale.

Omvendt proportionalitet følger følgende funktion:

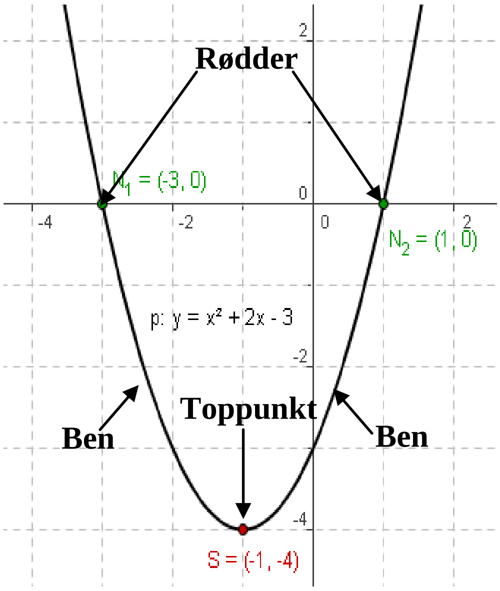
$$f(x) = \frac{a}{x}$$ (hvor a = en konstant dvs. et tal som ikke ændres)



Når den tegnes danner den en **hyperbel** (se graf).

Eksempel & Note: (forhold der er omvendt proportionale)

8.4 Andengradsligningen/funktion



En andengradsligning er en ligning som indeholder et x sat i anden potens:

$f(x) = ax^2 + bx + x$

Eks. $f(x) = x^2$

Eks. $f(x) = x^2 + x + 1$

8.4.1 Parablen

Grafen for en andengradsligning kaldes for en parabel:

- **Toppunkt:** Det punkt hvorom parablen er symmetrisk.
- **Ben:** Hvis benene vender opad siges parablen at være glad. Hvis benene vender nedad siges den at være sur.
- **Rødderne:** findes hvor parablen skærer x akslen.

Eksempel & Note:

8.4.2 Løsning af andengradsligning.

Når man løser en andengradsligning finder man rødderne der er skæringspunktet imellem parablen og x aksen.

Løsningen:

$ax^2 + bx – c = 0$

a, b og c er konstanter

Vi beregner først det vi kalder diskriminanten d:

$d = b^2 – (4 * a * c)$

Hvis:

$d > 0$ er der 2 løsninger (2 rødder)

$d = 0$ er der 1 løsning (1 rod)

$d < 0$ er der ingen løsninger

Vi kan beregne rødder, som vi kalder x_1 og x_2, ved:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{d}}{2*a}, \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{d}}{2*a}$$

Eksempel:

$1x^2 + 1x – 2 = 0$

$a = 1, b = 1, c = -2$

$d = 1^2 – (4 * 1 * -2)$

$d = 1 – (-8) = 1+8 = 9$

$d > 0$ og ligningen har 2 løsninger!

Vi sætter 9 ind i formlen.

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{9}}{2*1} = 1, \quad x_2 = \frac{-1-\sqrt{9}}{2*1} = -2$$

Eksempel & Note: (til løsning af andengradsligning)

8.4.3 Parablens Toppunkt:

Parablens toppunkt kan beregnes ved følgende formel:

$$(x, y) = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-d}{4a}\right) \text{ hvor } d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

Eks: $f(x) = x^2 + 2x - 3$

Først finder vi a, b, c

$a = 1, b = 2, c = -3$

Så beregnes diskriminanten d:

$d = 2^2 - 4 * 1 * -3 = 4 - (-12) = 4 + 12 = 16$

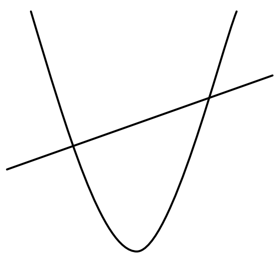
Så sættes ind i formlen:

$$(x, y) = \left(\frac{-2}{2*1}, \frac{-16}{4*1}\right) = \left(\frac{-2}{2}, \frac{-16}{4}\right) = (-1, -4)$$ => Toppunktet er derfor (-1, -4)

Eksempel & Note:

8.4.4 Skæringspunkt imellem parabel og linje

Hvis man vil finde skæringspunkterne imellem en ret linje og en parabel sætter man de to funktioner lig hinanden.



Eks: $f(x) = x + 3$ og $p(x) = 2x^2 + 4x + 1$

$p(x) = f(x)$

$2x^2 + 4x + 1 = x + 3$

$2x^2 + 4x + 1 - x - 3 = 0$

$2x^2 + 3x - 2 = 0$

Herefter kan andengradsligningen rødder findes og disse er x værdier til skæringspunkterne.

$d = 3^2 - 4 * 2 * -2 = 25$

$$x1 = \frac{-3+\sqrt{25}}{2*2} = ½ \quad x2 = \frac{-3-\sqrt{25}}{2*2} = -2$$ => skæring (½, 3½) og (-2, 1)

9.0 Anvendt Matematik:

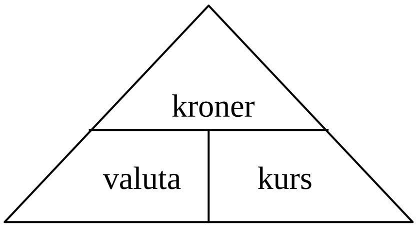
9.1 Valuta & Kurs:

Kursen fortæller hvad det koster i danske kroner at købe 100 i den fremmede valuta.

F.eks. er kursen for Euro ca. 750, hvilket betyder at:

100 euro = 750 kr.   Og derfor må

1 euro = 7,50 kr



I følgende formel er kursen prisen for 1 i den fremmede valuta!

Valuta = $\frac{kroner}{kurs}$ (**NB:** kurs = pris for 1 i fremmed valuta!!)

Eks: hvor mange euro kan man købe for 100 kr når kursen er 750?

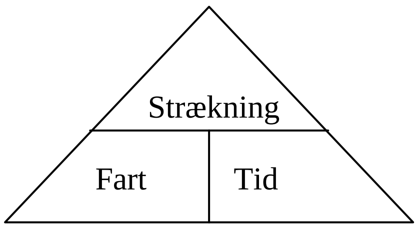
$\frac{100kr}{7{,}50}$ = 13,33 euro.

Eksempel & Note:

9.2 Fart:

9.2.1 Fartformel

Fart = $\frac{strækning}{Tid}$



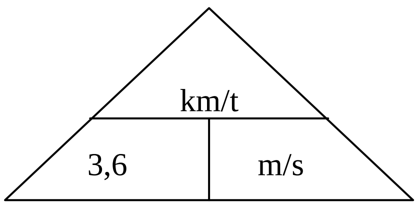
Husk: Enheden for strækningen (m, km) skal altid være den samme som den længde enhed der er i farten (m/t, km/t) Det tilsvarende kan siges om tiden. Måles tiden i sekunder skal farten også måles i sekunder osv!

Eks: En bil køre 120 km med en fart på 60 km/t. Hvor lang tid er den om at køre strækningen?

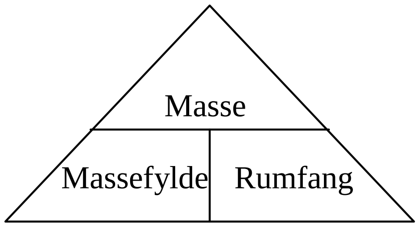
Tid = $\frac{120km}{60km/t}$ = 2 timer.

9.2.2 Fra km/t til m/s

Fart målt i m/s kan laves om til km/t ved at gange med 3,6.



9.3 Massefylde:



Massefylden fortæller hvad 1 ml vejer af et stof/metal/væske.

Massefylde = $\dfrac{masse}{Rumfang}$

Huskeregel: *Masse – Fylde (fylde = Rumfang) så kan man huske at det er masse divideret med rumfang.*

Husk: at hvis massefylde er i g/cm3 skal massen også være i gram. Det samme kan siges om rumfang.

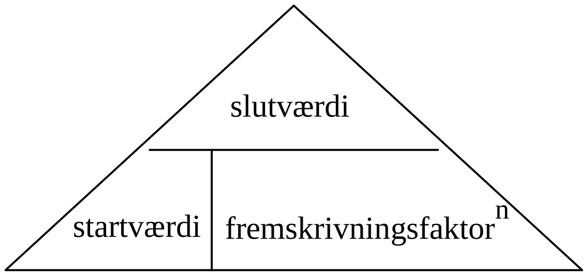
Eks: Hvad vejer 4 ml aluminium når massefylden er 2 g/cm^3?

ml og cm^3 er ikke den samme enhed. Men 1 ml = 1 cm3 så 4 ml = 4 cm3

vægt = 2 g/cm^3 * 4 cm^3 = 8 g

Eksempel & Note:

9. 4 Vækstberegninger



Bruges til at beregne en vækst over flere år/terminer.

Slutværdi = Startværdi * $(\text{fremskrivningsfaktor})^n$

Hvor:

Fremskrivningsfaktor = $\dfrac{100\% + vækst\%}{100}$

n = antal år (eller terminer)

Eks: 20.000 kr sættes i banken til en rente på 2 % pa. Hvor mange penge er der om 5 år?

Slutværdi = 20.000 kr * 1,02^5 = 22.082 kr

Eksempel & Note:

9.4.2 Samlet & Gennemsnitlig vækst

- Fremskrivningsfaktor = $\sqrt[n]{\left(\dfrac{slutværdi}{startværdi}\right)}$
- Samlet Vækst% =(fremskrivningsfaktor1 * fremskrivning.2 * .. * fremskrivning.n – 1) * 100
- Gnm Vækst%= ($\sqrt[n]{fremskrivningsfaktor}$ - 1) * 100

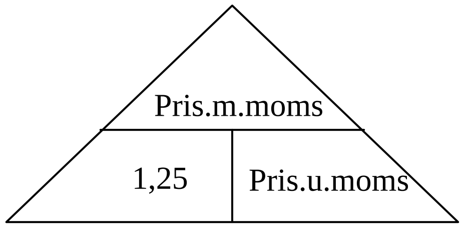
9.5 Økonomi

9.5.1 Moms

Moms er en skat der skal betales til staten som lægges oven i en varers salgspris. I Danmark er momsen på 25 % mens den i Tyskland er på 19 %.

$$\text{Salgspris med moms} = \frac{125\%}{100} * \text{Salgspris uden moms}$$

$$\text{Salgspris med moms} = 1{,}25 * \text{Salgspris uden moms}$$



Eksempel & Note:

9.5.2 Rentesregning.

Man kan bruge følgende formel til at beregne slutbeløbet af et beløb der er sat i banken et vist antal år til en bestemt rente:

$$\text{Slutbeløb} = \text{Startbeløb} * (1 + P\%)^n \qquad \text{Hvor } P\% = \frac{renten}{100}$$

- Renten: Den rente banken betaler per termin (som regel per år - p.a.).
- Startbeløb: Det beløb man starter med at sætte ind på sin konto.
- Slutbeløb: Det beløb der står på kontoen i slutningen af perioden.
- Terminer (n): Er renteperioden (antal år for det meste).

Eksempel & Note:

9.5.3 Lånebegreber:

- Fastforrentet lån: Et lån med samme rente og ydelse i hele løbetiden.
- Variabelforrentet lån: Et lån hvor renten ændre sig løbende med tiden.
- Afdragsfrie lån: Lån hvor man ikke betaler tilbage men kun renterne.
- Realkreditinstitut: Yder lån til ejerlejlighed og huskøb med op til 80 % af værdien.
- Teknisk Insolvent: Når lånet i huset overstiger værdien af huset.
- Rentefradrag: Jo flere penge man skylder væk jo flere penge kan man trække fra i skat.

9.5.4 Lån (annuitet)

Følgende formel kan bruges til at beregne den ydelse man vil have på et fastforrentet lån.

$$Ydelse = Hovedstol * \frac{P\%}{1-(1+P\%)^{-n}} \qquad \text{Hvor P\%} = \frac{renten}{100}$$

- <u>Renten:</u> Den procentdel man skal betale for at få lov til at låne pengene.
- <u>Hovedstol:</u> Er et andet ord for det lånte beløb.
- <u>Termin (n):</u> Er renteperioden (antal år for det meste).
- <u>Ydelse:</u> Er det som låntageren skal betale hvert år eller den længde terminen er fastsat til.

Eks: Ydelsen på et fastforrentet lån på 2.000.000 kr til en rente på 5 % i 30 år er.

$$\text{P\%} = \frac{5}{100} = 0{,}05$$

$$Ydelse = 2.000.000 * \frac{0{,}05}{1-(1+0{,}05)^{-30}} = 130.103 \text{ kr}$$

Lyder måske voldsomt men det er jo ydelsen pr år og pr måned må det så blive:

Ydelse pr måned = 130.103 / 12 = 10.842 kr

Eksempel & Note:

Beregning af det lånte beløb (hovedstolen) eller terminerne

$$Hovedstolen = Ydelse * \frac{(1-(1+P\%)^{-n})}{P\%} \qquad n = \frac{-\log\left(1-\frac{Hovedstolen * P\%}{Ydelse}\right)}{\log(1+P\%)}$$

Eksempel & Note:

9.5.5 Opsparing (annuitets):

Hvis man hvert år spare et bestemt beløb op og sætter det ind på en opsparingskonto kan man beregne det opsparede slutbeløb ved følgende formel:

$$Slutværdi = Ydelse * \frac{((1+P\%)^n - 1)}{P\%} \qquad \text{Hvor } P\% = \frac{renten}{100}$$

- Renten: Den rente banken betaler per termin (som regel per år - p.a.).
- Ydelsen (Y): Er det beløb som man sætter ind på opsparingskontoen hver termin.
- Termin (n): Er renteperioden (antal år for det meste).
- Slutværdi: Det beløb der står på opsparingskontoen efter det givne antal terminer.

Eks: 20.000 kr sættes ind på en opsparingskonto hvert år med en rente på 3,5 %. Hvad står der på kontoen efter 5 år?

$$Slutværdi = 20.000 * \frac{((1+0{,}035)^5 - 1)}{0{,}035} = 107.249 \text{ kr}$$

Eksempel & Note:

Beregning af ydelsen eller terminer

$$ydelse = \frac{Slutværdi * P\%}{((1+P\%)^n - 1)} \qquad \text{eller.} \qquad n = \frac{\log\left(\frac{Slutværdi * P\%}{ydelse} + 1\right)}{\log(1+P\%)}$$

Eksempel & Note: